Faculty of Engineering Chulalongkorn University

2110301 Introduction to Discrete Structures and Computation

First Semester, Quiz, July 17th , 2002, Time 90 minutes

ชื่อ นามสกุล________________________________ เลขประจำตัว________________ เลขที่ Cr58________

1. จงพิสูจน์ว่า ถ้ากำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ แล้ว

$$\gcd(a,b) = 2\gcd(a/2,b/2).$$

(5 คะแนน)

2. จงพิสูจน์โดยแสดงการพิสูจน์ หรือ ขัดแย้งโดยการยกตัวอย่าง ว่าข้อต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ **(5 คะแนน)**

ถ้ากำหนดให้ a b และ c เป็นจำนวนเต็ม ที่ $\gcd(a,b) = 1$ และ $\gcd(b,c) = 1$ แล้ว $\gcd(a,c) = 1$

3. จงพิสูจน์โดยแสดงการพิสูจน์ หรือ ขัดแย้งโดยการยกตัวอย่าง ว่าข้อต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ **(5 คะแนน)**

ถ้ากำหนดให้ a b และ c เป็นจำนวนเต็ม ที่ $c \mid a$ และ $c \mid b$ แล้ว $c \mid (ma + nb)$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม m และ n

ชื่อ นามสกุล_______________________________เลขประจำตัว________________ เลขที่ Cr58_______

4. กำหนดให้ a b และ $n > 0$ เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$a \equiv b \pmod{n}$ ก็ต่อเมื่อ $n \mid (a-b)$ **(10 คะแนน)**

ชื่อ นามสกุล________________________________เลขประจำตัว_________________ เลขที่ Cr58________

5. จงหาผลเฉลย x y และ z ที่เป็นจำนวนเต็ม ทั้งหมด ที่ทำให้ $29x + 11y - 16z = 7$ เป็นจริงโดยการแสดงวิธีคำนวณอย่างละเอียด **(15 คะแนน)**

ชื่อ นามสกุล________________________________ เลขประจำตัว________________ เลขที่ Cr58_______

6. กำหนดให้ x เป็นเลขจำนวนเต็มบวก จงหาค่าของ x ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ทำให้

$105 \equiv 21 \pmod{x}$ เป็นจริง **(5 คะแนน)**

7. ถ้าเราทราบว่า m เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และ $(5)^{-1} \bmod m = 3$ และ $(2)^{-1} \bmod m = 4$.
จงหาค่าของ m ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ สมการทั้งสองเป็นจริง **(5 คะแนน)**

8. จากทฤษฎีบทเล็กของแฟร์มาต์ (Fermat’s little theorem) กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้า $\gcd(a,p) = 1$ แล้ว $a^p \equiv 1 \pmod{p}$.
จากความรู้ของทฤษฎีดังกล่าว จงคำนวณหาค่าของ $5^{290} \bmod 13$. **(5 คะแนน)**

ชื่อ นามสกุล________________________________เลขประจำตัว________________ เลขที่ Cr58________

9. จงหาค่าของ จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด b ที่ทำให้ ข้อกำหนดทั้งหมดเป็นจริงพร้อมกัน

$b \equiv 1 \pmod{3}$

$b \equiv 2 \pmod{7}$

$b \equiv 9 \pmod{5}$

$b \equiv 6 \pmod{2}$

(10 คะแนน)

ชื่อ นามสกุล________________________________เลขประจำตัว________________ เลขที่ Cr58________

10. จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ที่ $b > 0$ แล้ว จะมีจำนวนเต็ม p และ q เพียงคู่เดียวที่ $a = pb + q$, โดยที่ $0 \leq q < b$. **(10 คะแนน)**

ชื่อ นามสกุล________________________________ เลขประจำตัว________________ เลขที่ Cr58________

11. จงพิสูจน์ว่า เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $\sqrt{p}$ จะต้องเป็นจำนวนอตรรกยะ (irrational) เสมอ **(5 คะแนน)**

12. จงอธิบายให้เห็นว่า ถ้า $\gcd(a,b) > 1$ แล้ว inverse ของ a modulo b ไม่มี (ในความเป็นจริง หมายความว่า inverse มีได้หลายค่า แต่ไม่จำเป็นต้องอยู่ใน modulo class เดียวกัน **(10 คะแนน)**