11

REGULAR DECIDABLE

REGULAR DECIDABLE

คุณสมบัติความสม่ำเสมอ

REGULARITY

A language is regular (describable by a regular expression) if and only if it can be accepted by a finite automaton.

What inherent property of a language identifies it as being regular ?

REGULAR DECIDABLE

คุณสมบัติความสม่ำเสมอ
REGULARITY

PALINDROME is not regular.
Since there are infinitely many distinguishable.

Remark
Language L contains infinitely many "pairwise distinguishable" with respect to L then L cannot be regular.

REGULAR DECIDABLE

คุณสมบัติความสม่ำเสมอ
REGULARITY

What is the relationship between regular and distinguishable ?

Define a relation:
We will say that two strings are equivalent if they are indistinguishable with respect to L.

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

INDISTINGUISHABILITY

Let L be any language in Σ*. The relation I_L on Σ*(the indistinguishability relation) is defined as follows:

For any two strings x, y in Σ*,

xI_Ly if and only if x and y are indistinguishable with respect to L.

In other words, xI_Ly if for any z in Σ*, either xz and yz are both in L or xz and yz are both in L'.

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

INDISTINGUISHABILITY

ตัวอย่าง

L be a language over Σ={0, 1}, defined as follows;

x ∈ L with length(x) > 0,

x does not contain "double characters".

Regular expression of L = (0+Λ)(10)*(1+Λ).

For instance, 0101 I_L 10101 since they are indistinguishable with respect to L.

For any z ∈Σ*,

if 0101z is in L, then 10101z is also in L,

if 0101z is not in L, then 10101z is not in L.

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

INDISTINGUISHABILITY

LEMMA

For any language L,
I_L is an equivalence relation on Σ*.

Let x, y and z be strings in Σ*.
Reflexive: xI_Lx
Symmetric: if xI_Ly then yI_Lx
Transitivity: if xI_Ly and yI_Lz then xI_Lz.

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

INDISTINGUISHABILITY

Proof

It is obvious for reflexive and symmetric.
Let x, y and z be strings in Σ*.
Given xI_Ly and yI_Lz, and for any $a \in \Sigma^*$.
Suppose that xa is in L,
we will show that za is in L.

Since xa is in L and xI_Ly, ya is also in L.
Since ya is in L and yI_Lz, za is in L.
thus xI_Lz. Q.E.D.

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

INDISTINGUISHABILITY

ตัวอย่าง

L be a language over Σ=(0, 1}, defined as follows;
x $\in$ L with length(x) > 0,
x does not contain “double characters”.

Regular expression of L = (0+Λ)(10)*(1+Λ).

[Λ] = { Λ }
[1] = { 1, 01, 101, 0101, ...}
[0] = { 0, 10, 010, 1010, ... }
[00+11] = { 00, 11, 000, 011, 111, ... }

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

INDISTINGUISHABILITY

ข้อสังเกตุ

If the set of all equivalence classes of I_L is finite, then it is possible to construct an DFA recognizing L in terms of the equivalence classes of I_L.

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

INDISTINGUISHABILITY

ข้อสังเกตุ

Automaton $M=(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$

$L_q = \{ x \in \Sigma \mid \delta^*(q_0, x) = q \}$

for $q \in Q$.

L_q is the set of all strings that end in the state q of M.

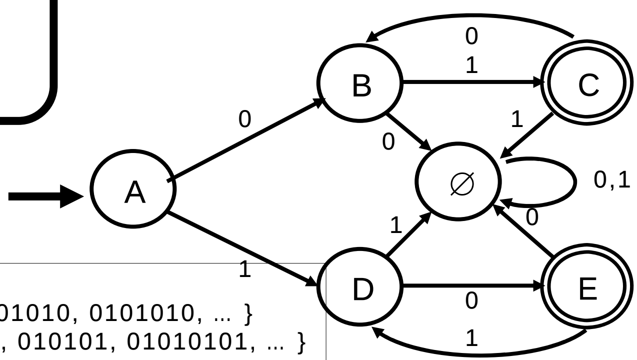
What is the relationship between them ?

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

INDISTINGUISHABILITY

ตัวอย่าง



$L_A = \{ \Lambda \}$

$L_B = \{ 0, 010, 01010, 0101010, \ldots \}$

$L_C = \{ 01, 0101, 010101, 01010101, \ldots \}$

$L_D = \{ 1, 101, 10101, 1010101, \ldots \}$

$L_E = \{ 10, 1010, 101010, 10101010, \ldots \}$

$L_\varnothing = \{ 00, 11, 000, 001, 100, 111, \ldots \}$

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

INDISTINGUISHABILITY

หมายเหตุ

If number of classes of I_L and L_q are the same, then

- two partitions are identical and
- FA is the fewest possible states recognizing L.

For strings x in Σ* and a in Σ

$$\delta([x], a) = [xa].$$

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

INDISTINGUISHABILITY

LEMMA

I_L is right invariant with respect to concatenation.
For any x, y in Σ*, and any a in Σ,
if x I_L y, then xa I_L ya.
Equivalently, if [x] = [y], then [xa] = [ya].

Proof:
Let x I_L y. Then x and y are indistinguishable with respect to L. For any z in Σ*, if xz is in L, then yz is in L.
Consider xaz, for any a in Σ*, if xaz is in L and let z′ = az, then yz′ is also in L. Thus xa I_L ya. Q.E.D.

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

INDISTINGUISHABILITY

ทฤษฎีบท

Let $L \subseteq \Sigma^*$, and Q_L be the set of equivalence classes of the relation I_L on Σ^*.
If Q_L is a finite set, then $M_L = (Q_L, \Sigma, q_0, A_L, \delta)$ is a finite automaton accepting L, where

- $q_0 = [\Lambda]$
- $A_L = \{ q \text{ in } Q_L \mid q \cap L \neq \emptyset \}$ and
- $\delta: Q_L \times \Sigma \rightarrow Q_L$ is defined by $\delta([x],a) = [xa]$.

Furthermore,
M_L has the fewest states of any FA accepting L.

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

INDISTINGUISHABILITY

พิสูจน์

If Q_L is a finite set, then M_L is finite.
Now, $M_L = (Q_L, \Sigma, q_0, A_L, \delta)$ recognizes the language L.
For any $x \in \Sigma^*$, $x \in L$ if and only if $\delta^*(q_0,x) \in A_L$.
Let $x \in L$. Since $x \in [x]$, we have that $x \in [x] \cap L \neq \emptyset$.
Since $\delta^*(q_0,x) = \delta([\Lambda],x) = [x] \in A_L$.

For $u, v \in \Sigma^*$, $(\delta([u], v) = [uv])$

If $\delta^*(q_0,x) \in A_L$, then $[x] \cap L \neq \emptyset$.
Let y be an element in $[x] \cap L$. We have that $y \in L$.
x and y are indistinguishable (same class), then $x \in L$.

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

INDISTINGUISHABILITY

ทฤษฎีบท

MYHILL-NERODE THEOREM

L is a regular if and only if Q_L is finite.

Q_L is finite, M_L is also finite.
$\delta([x],y) = [xy]$ for any strings x and y in Σ^*.

The partition L_q is finer than the partition I_L.

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

INDISTINGUISHABILITY

ตัวอย่าง

Let L = { x in {0, 1}* | x ends with 10 }.
Consider three strings, Λ, 1 and 10. Ant two of these strings are distinguishable with respect to L.

[Λ] = { Λ, 0, 1, 00, 000, 100, 0000, 0100, ... }

[1] = { 1, 01, 001, 0001, 00001, ... }

[10] = { 10, 010, 110, 0010, ... }.

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

INDISTINGUISHABILITY

ตัวอย่าง

Let L = { x in {0, 1}* | x ends with 10 }.
Consider three strings, Λ, 1 and 10. Ant two of these strings are distinguishable with respect to L.

$M_L = (Q_L, \{0, 1\}, [\Lambda], \{[10]\}, \delta)$ be the FA, and

$\delta([\Lambda], 0) = [\Lambda]$	$\delta([\Lambda], 1) = [1]$
$\delta([1], 0) = [10]$	$\delta([1], 1) = [1]$
$\delta([10], 0) = [\Lambda]$	$\delta([10], 1) = [1]$.

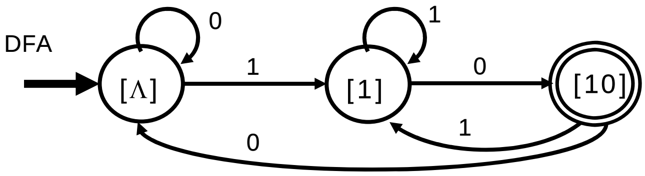
REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

INDISTINGUISHABILITY

ตัวอย่าง

Let L = { x in {0, 1}* | x ends with 10 }.
Consider three strings, Λ, 1 and 10. Ant two of these strings are distinguishable with respect to L.



โจทย์ น่าคิด

กำหนดให้ ภาษา 0^n1^n เมื่อ $n \geq 0$

{ Λ, 01, 0011, 000111, ... }

จงแสดงให้เห็นว่า

ภาษานี้ไม่เป็นภาษาสม่ำเสมอ

?

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

INDISTINGUISHABILITY

ตัวอย่าง

L = { 0^n1^n | $n \geq 0$ }, show that L is not regular.

Consider any strings of the form 0^i and 0^j with $i \neq i$.
They are distinguished by the string 1^i.

They are infinitely many strings of the form 0^i and 0^j.

Then there are infinitely many distinguished strings.

โจทย์ น่าคิด

กำหนดให้ ภาษา ww เมื่อ $w \in \Sigma^*$

{ Λ, 00, 11, 0000, 0101, ... }

จงแสดงให้เห็นว่า

ภาษานี้ไม่เป็นภาษาสม่ำเสมอ

?

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

INDISTINGUISHABILITY

ตัวอย่าง

L = { ww| w ∈{0, 1}* }, show that L is not regular.

Consider any strings of the form 0^i and 0^j with $i \neq i$.
They are distinguished by the string $1^i0^i1^i$.

They are infinitely many strings of the form 0^i and 0^j.

Then there are infinitely many distinguished strings.

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

MINIMAL FINITE STATE MACHINE

INDISTINGUISHABILITY

Number of equivalence classes

= number of states in M_L

then M_L is a minimal finite state machine.

Find a pair (L_p, L_q) such that L_p and L_q are in the same class, group it into one class.

By contraposition, we will find a pair (L_p, L_q) that they are in difference classes.

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

MINIMAL FINITE STATE MACHINE

INDISTINGUISHABILITY

LEMMA

For p and q in Q, $p \not\equiv q$, if and only if

There exists z in Σ^* so that

exactly one of the two states $\delta^*(p,z)$ and $\delta(q,z)$ is in A.

A pair (p, q) of states for which L_p and L_q are subsets of different equivalence classes, denoted by $p \not\equiv q$.

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

INDISTINGUISHABILITY

MINIMAL FINITE STATE MACHINE

LEMMA

For p and q in Q, p ≢ q,
if and only if there exists z in Σ* so that
exactly one of the two states δ*(p,z) and δ(q,z) is in A.

Proof:

Let p ≢ q. Let x is in L_p and y is in L_q, we have that there exists z in Σ*, xz and yz are distinguishable,

$\delta^*(p,z) = \delta^*(\delta^*(q_0,x),z) = \delta^*(q_0,xz)$

$\delta^*(q,z) = \delta^*(\delta^*(q_0,y),z) = \delta^*(q_0,yz)$ only one is in L.

Suppose that only one of δ*(p,z) and δ(q,z) is in A.
It means that z distinguishes x in L_p and y in L_q with respect to L. Therefore p ≢ q.

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

MINIMAL FINITE STATE MACHINE

INDISTINGUISHABILITY

Consider (p,q) be a distinguishable pair.
Let r and s be two states in Q.
For some a in Σ, such that δ(r,a) = p and δ(s,a) = q.

Since

$\delta^*(r,az) = \delta^*(\delta^*(r,a)) = \delta^*(p,z)$

$\delta^*(s,az) = \delta^*(\delta^*(s,a)) = \delta^*(q,z)$,

we can conclude that (r,s) is also be a distinguishable pair.

REGULAR DECIDABLE

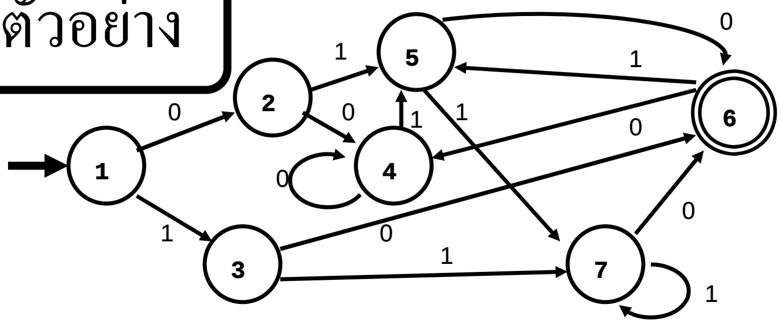
ความสามารถในกา

MINIMAL FINITE
STATE MACHINE

ALGORITHM

INDISTINGUISHABILITY

ตัวอย่าง



(0+1)*(01)

REGULAR DECIDABLE

ความสามารถในการแยกความไม่แตกต่างกันได้

MINIMAL FINITE STATE MACHINE

TINGUISHABILITY

Algorithm

2						
3	2	2				
4			2			
5	2	2		2		
6	1	1	1	1	1	
7	2	2		2		1
	1	2	3	4	5	6

State	class #1	class #2	class #3
1	1		
2	1,2		
3		3	
4	1,2,4		
5		3,5	
6			6
7		3,5,7	

REGULAR DECIDABLE

ความไม่สม่ำเสมอ

NONREGULAR

A Language that cannot be defined by a regular expression is called a nonregular language.

REGULAR DECIDABLE

ความไม่สม่ำเสมอ

NONREGULAR

บทวิเคราะห์

Given an infinite regular language L

Suppose that there exists a FA with n states associated with L.

For any word x in L such that |x| ≥ n,

- consider a path associated with x,

  $q_0 q_1 q_2 \cdots q_{n+1}$

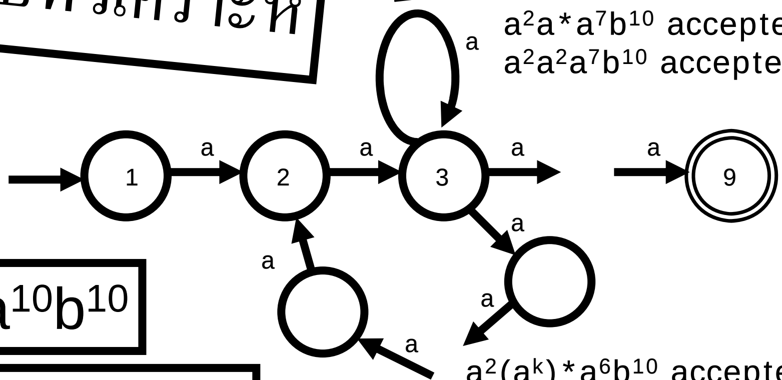
- then, there exists $q_i = q_j$ where $i \neq j$.

REGULAR DECIDABLE

ความไม่สม่ำเสมอ

NONREGULAR

บทวิเคราะห์



$a^2a^*a^7b^{10}$ accepted
$a^2a^2a^7b^{10}$ accepted

$a^{10}b^{10}$

FA with 9 states

$a^2(a^k)^*a^6b^{10}$ accepted
$a^2a^{2k}a^6b^{10}$ accepted

REGULAR DECIDABLE

ความไม่สม่ำเสมอ

NONREGULAR

ทฤษฎีบท

Suppose L is a regular language recognized by a finite automaton with n states.

For any $u \in L$, with $|u| \geq n$,
there are strings x, y and z so that

$u = xyz$
$|xy| \leq n$
$y \neq \Lambda$

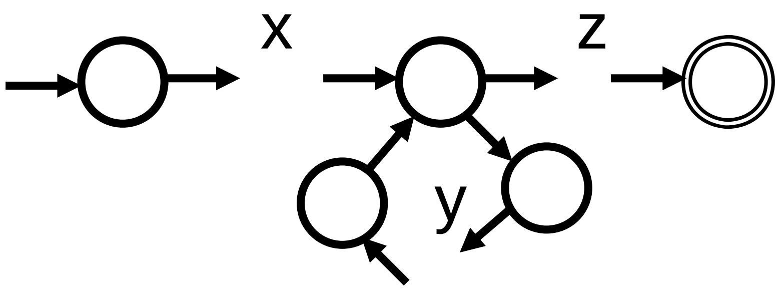
For any $m \geq 0$, $xy^mz \in L$.

REGULAR DECIDABLE

ทฤษฎีบท

ความไม่สม่ำเสมอ

NONREGULAR



xy*z is also accepted by this finite automaton.

REGULAR DECIDABLE

ทฤษฎีบท

ความไม่สม่ำเสมอ

NONREGULAR

For any $u \in L$, $|u| \geq n$. Let $u = u_1u_2u_3\ldots u_m$; $m \geq n$

By the pigeonhole principle,

there exist u_i and u_j such that

$\delta^*(q_0,u_1u_2\ldots u_i) = q_i$ and $\delta^*(q_0,u_1u_2\ldots u_i\ldots u_j) = q_i$

It is clear that $\delta^*(q_i,u_{i+1}u_{i+2}\ldots u_j) = q_i$

We also have that $|u_1u_2\ldots u_i\ldots u_j| \leq n$.

Let $x = u_1u_2\ldots u_i$, $y = u_{i+1}u_{i+2}\ldots u_j$ and $z = u_{j+1}u_{j+2}\ldots u_m$.

For any $m \geq 0$, $xy^mz \in L$.

REGULAR DECIDABLE

ทฤษฎีบท

ความไม่สม่ำเสมอ

NONREGULAR

PUMPING LEMMA
FOR REGULAR LANGUAGE

L be a regular language.
There is an integer n so that for any u in L, with $|u| \geq n$, there are strings x, y and z so that

- $u = xyz$
- $|xy| \leq n$
- $|y| > 0$
- for any $m \geq 0$, xy^mz is in L.

โจทย์ น่าคิด

กำหนดให้ ภาษา 0^n1^n เมื่อ $n \geq 0$

{ Λ, 01, 0011, 000111, ... }

USING PUMPING LEMMA

จงแสดงให้เห็นว่า

ภาษานี้ไม่เป็นภาษาสม่ำเสมอ

?

โจทย์ น่าคิด

กำหนดให้ ภาษา ww เมื่อ w $\in \Sigma^*$

{ Λ, 00, 11, 0000, 0101, ... }

USING PUMPING LEMMA

จงแสดงให้เห็นว่า

ภาษานี้ไม่เป็นภาษาสม่ำเสมอ

?

โจทย์ น่าคิด

กำหนดให้ ภาษา

$\{0^k w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ and } |w| \leq k\}$

USING PUMPING LEMMA

จงแสดงให้เห็นว่า

ภาษานี้ไม่เป็นภาษาสม่ำเสมอ

?

โจทย์ น่าคิด

กำหนดให้ ภาษา

$\{ w \in \{0,1\}^* \mid n_0(w) = n_1(w) \}$

USING PUMPING LEMMA

จงแสดงให้เห็นว่า

ภาษานี้ไม่เป็นภาษาสม่ำเสมอ

?

โจทย์ น่าคิด

กำหนดให้ ภาษา

$\{ 0^k \mid k \text{ is a prime number} \}$

USING PUMPING LEMMA

จงแสดงให้เห็นว่า

ภาษานี้ไม่เป็นภาษาสม่ำเสมอ

?