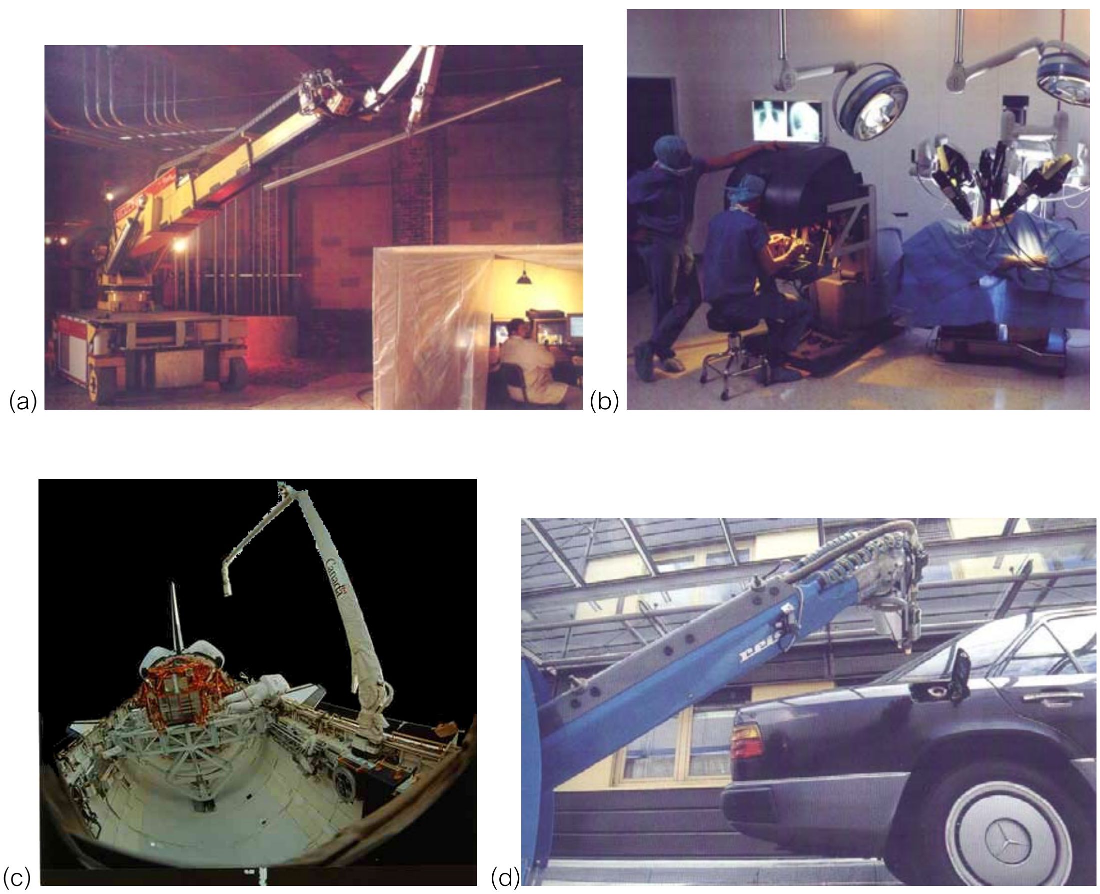
1 แขนกล

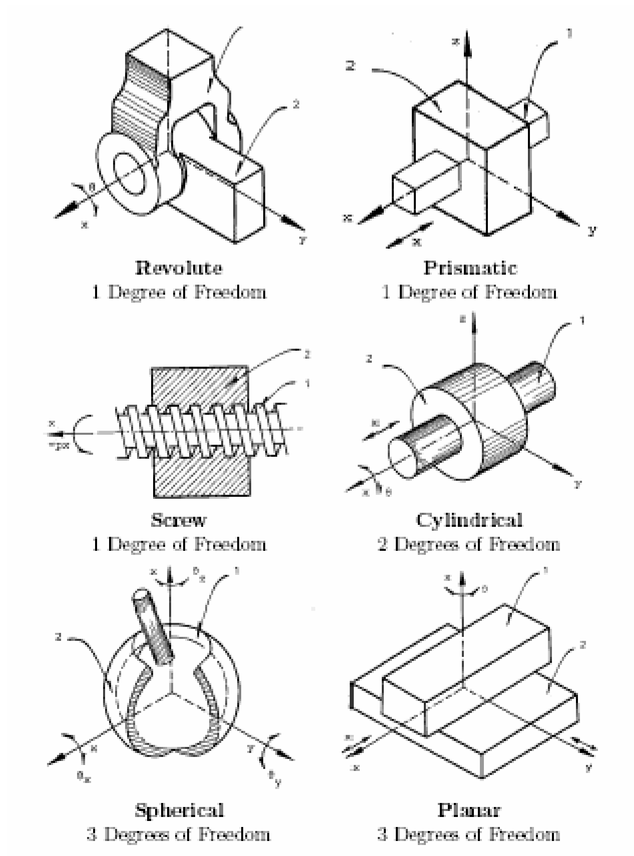
หุ่นยนต์ที่เราพิจารณาในเรื่องการวางแผนการเคลื่อนที่นั้น ถูกจำกัดว่าเป็นวัตถุชิ้นเดียวเพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ แต่ในความเป็นจริงโดยทั่วไปหุ่นยนต์ประกอบขึ้นจากชิ้นส่วนต่างๆ หลายชิ้นที่เคลื่อนที่สัมพันธ์กัน นอกเหนือจากหุ่นยนต์เคลื่อนที่ได้ ยังมีหุ่นยนต์อีกประเภทที่พบเห็นได้ในโรงงานประกอบชิ้นส่วน นั่นคือแขนกล ปัจจุบันแขนกลได้มีบทบาทข้ามขอบเขตของโรงงานเข้ามาในชีวิตของเราในแง่อื่นๆ เพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆ



รูปที่ 1.1 การประยุกต์ใช้แขนกล

1.1 ข้อต่อ

แขนกลคือหุ่นยนต์ที่ประกอบไปด้วยท่อนแขน (link) ที่นำมาประกอบกันด้วยข้อต่อ (joint) ข้อต่อมีหลายแบบ แต่ละแบบก็จะอนุญาตให้เกิดการเคลื่อนที่ของท่อนแขนที่แตกต่างกันไป รูปที่ 1.2 แสดงข้อต่อแบบต่างๆ ที่นิยมใช้ ลองพิจารณาว่าข้อต่อแต่ละแบบบังคับการเคลื่อนที่ของท่อนแขนสองท่อนที่มาเชื่อมกันอย่างไร

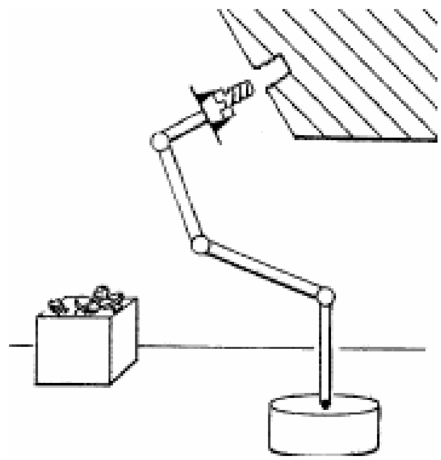


รูปที่ 1.2 ข้อต่อแบบต่างๆ

ในการสร้างแขนกลโดยทั่วไป ข้อต่อที่นิยมใช้มากที่สุดคือข้อต่อแบบหมุน (revolute joint) และข้อต่อแบบเลื่อน (prismatic joint) สำหรับข้อต่อแบบหมุน ท่อนแขนสองท่อนถูกยึดติดกันที่จุดหมุนซึ่งอยู่บนท่อนแขน โดยแต่ละท่อนสามารถหมุนได้รอบจุดหมุนนี้ เราสามารถบอกตำแหน่งของสองท่อนแขนที่สัมพันธ์กันด้วยมุมที่ท่อนแขนหมุนไป ส่วนข้อต่อแบบเลื่อนนั้น ท่อนแขนสองท่อนติดอยู่ด้วยกันในลักษณะเดียวกันกับเสาอากาศวิทยุรถยนต์ที่ยืดหดได้ โดยท่อนแขนแต่ละท่อนสามารถเลื่อนเข้าออกได้ในหนึ่งทิศทาง เราสามารถระบุตำแหน่งที่สัมพันธ์กันของสองท่อนแขนได้จากระยะเลื่อนเข้าออกดังกล่าว จะเห็นได้ว่าข้อต่อแบบหมุนและข้อต่อแบบเลื่อนมีระดับเสรีของการเคลื่อนที่

เป็นหนึ่ง เราเรียกตัวแปรที่กำหนดการเคลื่อนที่นี้ซึ่งได้แก่มุมหมุนของข้อต่อแบบหมุน และระยะเลื่อนของข้อต่อแบบเลื่อนว่าเป็นพารามิเตอร์ของข้อต่อ การมีระดับเสรีของการเคลื่อนที่เป็นหนึ่งทำให้ง่ายในการออกแบบและวิเคราะห์ ข้อต่อทั้งสองแบบจึงถูกใช้มากที่สุดในการสร้างแขนกล โดยแขนกลที่มีระดับเสรีสูงๆ ก็สามารถสร้างขึ้นได้ โดยการประกอบท่อนแขนหลายท่อนด้วยข้อต่อสองแบบนี้

แขนกลทำงานด้วยการเคลื่อนที่ของท่อนแขนที่สัมพันธ์กันเพื่อให้ปลายแขน (end effector) ไปอยู่ในตำแหน่งและทิศทางที่เหมาะสม เพื่อเครื่องมือที่ติดอยู่ที่ปลายแขนจะได้ทำงานที่ต้องการได้โดยสะดวกและมีประสิทธิภาพ ตัวอย่างในรูปที่ 1.3 แสดงให้เห็นถึงความจำเป็นที่ต้องจัดการให้ปลายแขนอยู่ในตำแหน่งและทิศทางที่เหมาะสม

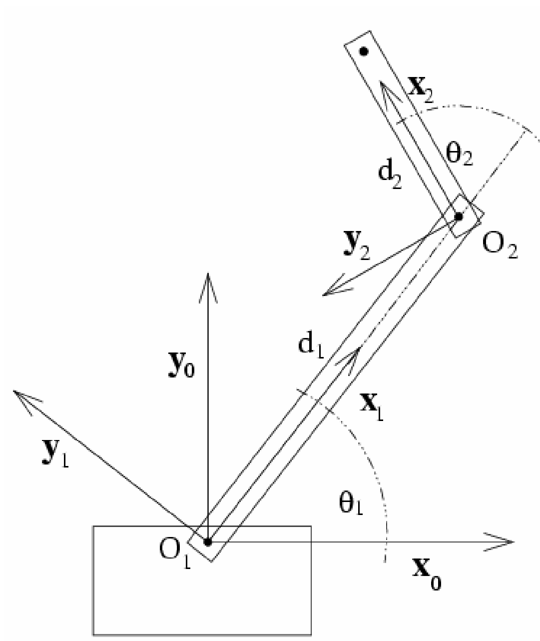


รูปที่ 1.3 แขนกลกำลังไขสกรูลงในเกลียวที่ต้องการ

การคำนวณว่าปลายแขนจะอยู่ที่ตำแหน่งและทิศทางใดจึงเป็นเรื่องสำคัญ การคำนวณดังกล่าวอาศัยการกำหนดให้ท่อนแขนแต่ละท่อนมีพิกัดส่วนตัว ที่เราจะเรียกว่าเฟรม เฟรมประกอบไปด้วยจุดกำเนิดและเวกเตอร์แกน โดยเฟรมที่กล่าวถึงจะอยู่ติดแน่นกับท่อนแขนที่เป็นเจ้าของเสมอ หรืออีกนัยหนึ่งก็คือแต่ละท่อนแขนจะอยู่นิ่งไม่ขยับเขยื้อนเมื่อเทียบกับเฟรมของมัน สำหรับท่อนแขนที่เกิดจากการเรียงต่อกันไป เรานิยมเรียกท่อนแขนที่อยู่นิ่งยึดติดกับพื้นว่าฐาน (base) และเรียกท่อนถัดมาตามชื่อส่วนของแขนได้แก่ ไหล่(shoulder) ข้อศอก(elbow) แขนท่อนบน (forearm) และข้อมือ (wrist) เป็นต้น ตำแหน่งและทิศทางการวางตัวของท่อนแขนหนึ่งๆ เมื่อเทียบกับเฟรมของฐานจึงขึ้นอยู่กับตำแหน่งและทิศทางของท่อนแขนก่อนๆ ด้วย เราสามารถคำนวณตำแหน่งและทิศทางของปลายแขนได้ด้วยการใช้การแปลงเอกพันธ์ที่ได้ศึกษาไปแล้ว โดยทำการคูณเมทริกซ์การแปลงแบบซ้ายไปขวาพิจารณาจากฐานไปจนถึงปลายแขน ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงการคำนวณตำแหน่งของแขนกลในสองมิติที่มีสองข้อต่อ (รูปที่ 1.4)

ให้เฟรมของฐานคือ F_0 มีจุดกำเนิด O_1 และเวกเตอร์แกน $\mathbf{x}_0$ และ $\mathbf{y}_0$ ให้เฟรมของ L_1 คือ F_1 มีจุดกำเนิด O_1 และเวกเตอร์แกน $\mathbf{x}_1$ และ $\mathbf{y}_1$ และ ให้เฟรมของ L_2 คือ F_2 มีจุดกำเนิด O_2 และเวกเตอร์แกน $\mathbf{x}_2$ และ $\mathbf{y}_2$ กำหนดให้

$$\mathbf{R}(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ และ } \mathbf{D}(a,b)=\begin{bmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



รูปที่ 1.4 ตัวอย่างแขนกลในสองมิติที่มีสองข้อต่อ

เราสามารถเขียน F_1 ได้จากการหมุน F_0 รอบจุดกำเนิดไปเป็นมุม θ_1 ดังนั้นพิกัดใน F_1 สามารถเขียนเป็นพิกัดใน F_0 ได้ด้วยการคูณข้างหน้าด้วย $\mathbf{R}(\theta_1)$ เช่นเดียวกันเราสามารถเขียน F_2 ได้จากการเลื่อน F_1 ไปตาม $\mathbf{x}_1$ เป็นระยะ d_1 จากนั้นหมุนรอบจุดกำเนิดของเฟรมที่ได้จากการเลื่อนนี้ไปเป็นมุม θ_2 นั่นคือพิกัดใน F_2 สามารถเขียนเป็นพิกัดใน F_1 ด้วยการคูณข้างหน้าด้วย $\mathbf{D}(d_1,0)\mathbf{R}(\theta_2)$ เมื่อนำมาประกอบกันจะได้ว่าพิกัดใน F_2 สามารถเขียนเป็นพิกัดใน F_0 ด้วยการคูณข้างหน้าด้วย $\mathbf{R}(\theta_1)\mathbf{D}(d_1,0)\mathbf{R}(\theta_2)$ เช่นปลายแขนที่มีพิกัดเอกพันธ์ใน F_2 คือ $\begin{pmatrix}d_2\\0\\1\end{pmatrix}$ จะมีพิกัด

ใน F_0 คือ $\mathbf{R}(\theta_1)\mathbf{D}(d_1,0)\mathbf{R}(\theta_2)\begin{pmatrix}d_2\\0\\1\end{pmatrix}=$

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & d_1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}d_2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}d_2\cos(\theta_1+\theta_2)+d_1\cos\theta_1\\ d_2\sin(\theta_1+\theta_2)+d_1\sin\theta_1\\ 1\end{pmatrix}$$

จะเห็นได้ว่าเราสามารถเขียนตำแหน่งและทิศทางของปลายแขนในพิกัดของฐานให้อยู่ในรูปของพารามิเตอร์ของข้อต่อ หลักการสำคัญก็คือการกำหนดพิกัดส่วนตัวที่เหมาะสมให้แต่ละท่อนแขน ถึงแม้ว่าในทางทฤษฎีแล้วจุดกำเนิดของพิกัดจะอยู่ที่ใดก็ได้ (ขอให้ยึดติดกับท่อนแขนที่เป็นเจ้าของเป็นใช้ได้) แต่ในทางปฏิบัติเรานิยมเลือกให้จุดกำเนิดของพิกัดอยู่ตรงข้อต่อ นอกจากนี้ในตัวอย่างที่ผ่านมา เรากำหนดให้เวกเตอร์แกน $\mathbf{x}_1$ ผ่านทั้ง O_1 และ O_2 บังคับให้การเลื่อนที่ต้องการอยู่ในแกนเดียวเท่านั้น สะดวกในการคำนวณ

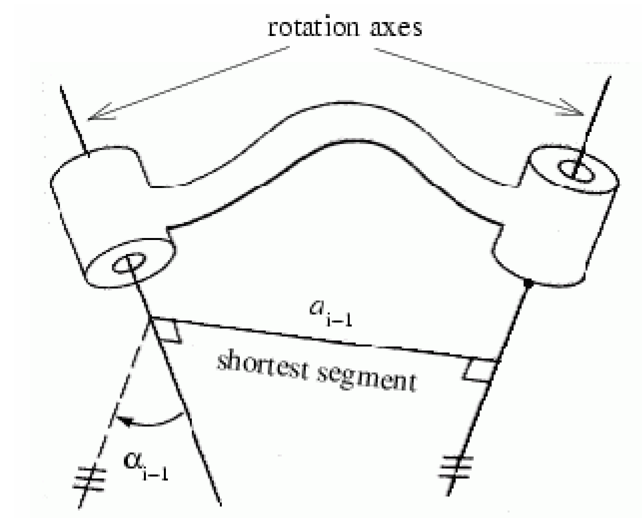
การคำนวณพิกัดของจุดใดๆ ของแขนกลให้อยู่ในรูปของพิกัดฐานเป็นการคำนวณการแปลงในลักษณะต่อเนื่องกันเป็นลูกโซ่ โดยพิจารณาจากพิกัดฐานไปยังพิกัดที่จุดที่ต้องการนั้นเขียนอยู่ เรานิยมอ้างถึงท่อนแขนที่เรียงต่อกันไปเริ่มจากฐานด้วยจำนวนเต็ม 0,1,2,... เราจึงสามารถเขียนได้ว่า $\mathbf{T}_{0,n}=\mathbf{T}_{0,1}\mathbf{T}_{1,2}...\mathbf{T}_{n-1,n}$ โดย $\mathbf{T}_{i,j}$ เป็นเมทริกซ์การแปลงเอกพันธ์จากพิกัดในเฟรม F_j ไปเป็นพิกัดในเฟรม F_i

1.2 จลนศาสตร์ทางตรงของแขนกล(Forward Kinematics of Manipulator)

จลนศาสตร์สนใจเกี่ยวกับการเรียงตัว ตำแหน่ง ทิศทาง และการเปลี่ยนแปลงของสิ่งต่างๆ เหล่านี้ของโครงสร้างโดยไม่คำนึงถึงแรงต้นเหตุ จลนศาสตร์ทางตรงของแขนกลว่าด้วยการคำนวณตำแหน่งในพิกัดที่ถือว่าหยุดนิ่ง ของจุดบนแขนกลที่กำหนดให้ ตัวอย่างในหัวข้อก่อนได้แสดงการคำนวณดังกล่าวในสองมิติ ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาจลนศาสตร์ทางตรงของแขนกลในกรณีสามมิติ หลักการคำนวณยังคงเหมือนในกรณีสองมิติ หากแต่ว่าเราจะเสนอวิธีการจัดระบบตัวแปรต่างๆ อย่างมีระเบียบ ทั้งนี้ก็เพื่อการคำนวณจะทำได้อย่างมีระบบไม่สับสน

หลักการก็คือเรามีท่อนแขนที่เรียงต่อกันจากฐานซึ่งนับเป็นท่อนที่ 0 ไปจนถึงปลายแขนท่อนที่ n ให้ F_i เป็นเฟรมของท่อนแขนที่ i อันประกอบไปด้วยจุดกำเนิด O_i และเวกเตอร์แกน $\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i,\mathbf{z}_i$ เราสามารถคำนวณเช่นเดียวกันกับกรณีสองมิติได้ว่าจุด P ที่มีพิกัดเป็น $\mathbf{p}_n$ ในเฟรม F_n จะมีพิกัดในเฟรม F_0 เป็น $\mathbf{p}_0=\mathbf{T}_{0,n}\mathbf{p}_n$ โดยที่ $\mathbf{T}_{0,n}=\mathbf{T}_{0,1}\mathbf{T}_{1,2}...\mathbf{T}_{n-1,n}$ ดังนั้นสิ่งที่เราต้องสนใจก็คือการหา $\mathbf{T}_{i-1,i}$ ขอเริ่มด้วยวิธีการกำหนดจุดกำเนิดและเวกเตอร์แกนให้กับเฟรมต่างๆ

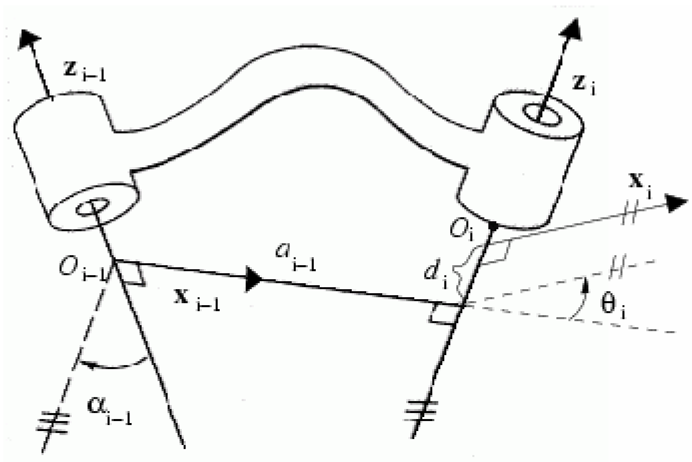
รูปที่ 1.5 แสดงข้อต่อที่อยู่ถัดกัน สองข้อต่อนี้ต้องอยู่บนเฟรมที่ถัดกันด้วย สมมุติว่าข้อต่อทางซ้ายอยู่ในเฟรม F_{i-1} และข้อต่อทางขวาอยู่ในเฟรม F_i พิจารณาเส้นตรงสองเส้นที่ลากผ่านแกนหมุนของข้อต่อทั้งสอง หากสองเส้นตรงนี้ไม่ขนานกันและไม่ตัดกัน เราสามารถหาส่วนของเส้นตรงที่สั้นที่สุดที่เชื่อมเส้นตรงที่ผ่านแกนนี้ได้ แน่นอนว่าส่วนของเส้นตรงนี้ต้องอยู่ในทิศทางที่ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านแกนทั้งสอง ในรูปที่ 1.5 ระยะห่างที่สั้นที่สุดนี้ก็คือ a_{i-1} และมุมระหว่างภาพฉายในทิศทางของเส้นตรงที่สั้นที่สุดของเส้นตรงที่ผ่านแกนทั้งสองเท่ากับ α_{i-1} (มุมนี้ก็คือมุมน้อยที่สุดที่เส้นตรงที่ผ่านแกนต้องบิดเพื่อมาขนานกัน)



รูปที่ 1.5 แกนหมุนของสองข้อต่อบนเฟรมที่อยู่ถัดกัน

ในรูปที่ 1.6 ให้ L_{i-1} คือเส้นสั้นสุดที่เชื่อมระหว่างแกนหมุนของข้อต่อทางซ้ายกับแกนหมุนของข้อต่อทางขวา กำหนดให้จุดกำเนิดของเฟรม F_{i-1} อยู่ที่ O_{i-1} ซึ่งก็คือจุดตัดระหว่างแกนหมุนของข้อต่อทางซ้ายกับ L_{i-1} นอกจากนี้เรายังกำหนดให้เวกเตอร์แกน $\mathbf{z}_{i-1}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับแกนหมุนของข้อต่อซ้าย และเวกเตอร์แกน $\mathbf{x}_{i-1}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับ L_{i-1} โดยชี้จากแกนหมุนของข้อต่อซ้ายไปยังแกนหมุนของข้อต่อขวา ในทำนองเดียวกันเราให้ L_i เป็นเส้นสั้นสุดที่เชื่อมระหว่างแกนหมุนของข้อต่อทางขวากับแกนหมุนของข้อต่อที่อยู่ถัดไป (ไม่ได้แสดงในรูป) กำหนดให้จุด O_i เป็นจุดกำเนิดของเฟรม F_i โดยจุดนี้เป็นจุดตัดระหว่างแกนหมุนของข้อต่อทางขวากับ L_i เรากำหนดให้เวกเตอร์แกน $\mathbf{z}_i$ เป็นเวกเตอร์ขนานกับแกนหมุนของข้อต่อทางขวาและเวกเตอร์แกน $\mathbf{x}_i$ เป็นเวกเตอร์ขนานกับ L_i โดยชี้จากแกนหมุนของข้อต่อทางขวาไปยังแกนหมุนของข้อต่อถัดไป ถึงจุดนี้เราได้กำหนดจุดกำเนิดและเวกเตอร์แกนให้กับเฟรม F_{i-1} และ F_i เรียบร้อยแล้ว ($\mathbf{y}_{i-1}$ และ $\mathbf{y}_i$ หาได้จากการใช้กฎมือขวากับเวกเตอร์แกนที่กำหนดไปแล้ว) จึงไม่ยากที่จะหาการแปลง $\mathbf{T}_{i-1,i}$ ที่ต้องการ วิธีทำก็คือเราต้องหาการเคลื่อนที่ซึ่งทำให้เฟรม F_{i-1} มาอยู่ทับกับเฟรม F_i จากรูปที่ 1.6 จะเห็นได้ว่าสิ่งที่เราต้องทำก็คือหมุนเฟรม F_{i-1} รอบแกน $\mathbf{x}_{i-1}$ เป็นมุม α_{i-1} จากนั้นเลื่อนเฟรมที่ได้ตามแกน $\mathbf{x}_{i-1}$ เป็นระยะทาง a_{i-1} ถึงตรงจุดนี้แกน $\mathbf{z}_{i-1}$ จะอยู่ทับกับแกน $\mathbf{z}_i$ แต่เวกเตอร์แกน $\mathbf{x}_{i-1}$ กับ

$\mathbf{x}_i$ จะยังไม่ขนานกัน รวมทั้ง O_{i-1} และ O_i ก็ยังห่างกันเป็นระยะ d_i นั่นก็คือเราจะต้องหมุน F_{i-1} ต่อ รอบแกน $\mathbf{z}_{i-1}$ เป็นมุม θ และเลื่อน F_{i-1} ไปตามแกน $\mathbf{z}_{i-1}$ เป็นระยะ d_i โดยสรุปเราเขียนเป็นสูตรได้คือ



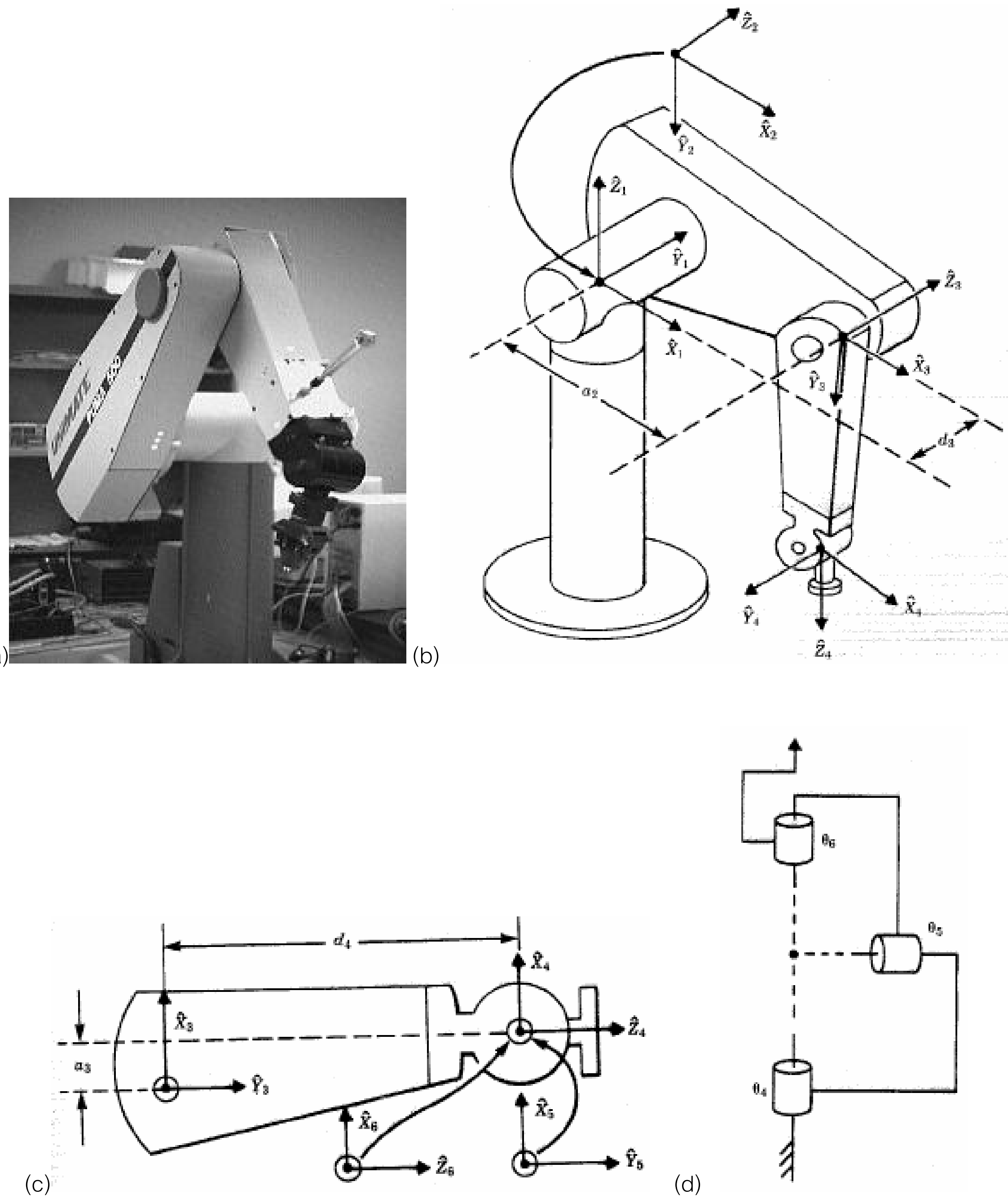
รูปที่ 1.6 การกำหนดเวกเตอร์แกนและจุดกำเนิดให้กับเฟรมทั้งสอง

$$\mathbf{T}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & \cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin\theta_i\cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -d_i\sin\alpha_{i-1} \\ \sin\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & d_i\cos\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่าขั้นตอนการหา $\mathbf{T}_{0,n} = \mathbf{T}_{0,1}\mathbf{T}_{1,2}...\mathbf{T}_{n-1,n}$ เริ่มได้จากการพิจารณาท่อนแขนที่ 0 ไปจนถึงท่อนแขนที่ n แล้วพยายามกำหนดเฟรมของแต่ละท่อนแขน โดยเริ่มจากการกำหนดแกน $\mathbf{z}_i$ ของแต่ละท่อนแขน i (หากเป็นข้อต่อแบบหมุน เรากำหนดให้แกนนี้ผ่านแกนหมุน) จากนั้นกำหนดจุดกำเนิด O_i และแกน $\mathbf{x}_i$ จากส่วนของเส้นตรงสั้นสุดที่เชื่อมระหว่าง $\mathbf{z}_i$ และ $\mathbf{z}_{i+1}$ (L_i) เมื่อเฟรมถูกกำหนดแล้วค่าของ $a_{i-1}, \alpha_{i-1}, d_i, \theta_i$ สำหรับ $i = 1, 2, ..., n$ ที่ต้องการก็สามารถคำนวณได้โดยง่าย

ลองพิจารณาการคำนวณที่กล่าวไปแล้วกับแขนกลจริง รูปที่ 1.7 แสดงแผนผังของข้อต่อของแขนกล PUMA 560 แขนกลรุ่นนี้เป็นผลิตภัณฑ์ของบริษัท unimation ที่ได้รับความนิยมเป็นอย่างมาก มีระดับเสรีเป็นหก สามข้อต่อแรกจากฐานควบคุมการเคลื่อนที่แบบหยาบ และสามข้อต่อปลายเป็นตัวหลักในการควบคุมทิศทางของอุปกรณ์ที่ติดอยู่ที่ปลายแขน



(a) (b) (c) (d)

รูปที่ 1.7 แผนผังข้อต่อของแขนกล PUMA 560

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	$-\pi/2$	0	0	θ_2
3	0	a_2	d_3	θ_3
4	$-\pi/2$	a_3	d_4	θ_4
5	$\pi/2$	0	0	θ_5
6	$-\pi/2$	0	0	θ_6

เขียนได้ว่า

$$\mathbf{T}_{0,1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_{1,2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{2,3} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & a_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_{3,4} = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -\sin\theta_4 & -\cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{4,5} = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_{5,6} = \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_6 & -\cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งในที่สุดเราจะได้ $\mathbf{T}_{0,6} = \mathbf{T}_{0,1}\mathbf{T}_{1,2}\mathbf{T}_{2,3}\mathbf{T}_{3.4}\mathbf{T}_{4,5}\mathbf{T}_{5,6} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ โดยที่

$$r_{11} = \cos\theta_1\left[\cos(\theta_2+\theta_3)(\cos\theta_4\cos\theta_5\cos\theta_6 - \sin\theta_4\sin\theta_6) - \sin(\theta_2+\theta_3)\sin\theta_5\cos\theta_6\right] + \sin\theta_1\left[\sin\theta_4\cos\theta_5\cos\theta_6 + \cos\theta_4\sin\theta_6\right]$$

$$r_{21} = \sin\theta_1\left[\cos(\theta_2+\theta_3)(\cos\theta_4\cos\theta_5\cos\theta_6 - \sin\theta_4\sin\theta_6) - \sin(\theta_2+\theta_3)\sin\theta_5\cos\theta_6\right] - \cos\theta_1\left[\sin\theta_4\cos\theta_5\cos\theta_6 + \cos\theta_4\sin\theta_6\right]$$

$$r_{31} = -\sin(\theta_2+\theta_3)(\cos\theta_4\cos\theta_5\cos\theta_6 - \sin\theta_4\sin\theta_6) - \cos(\theta_2+\theta_3)\sin\theta_5\cos\theta_6$$

$$r_{12} = \cos\theta_1\left[\cos(\theta_2+\theta_3)(-\cos\theta_4\cos\theta_5\cos\theta_6 - \sin\theta_4\cos\theta_6) + \sin(\theta_2+\theta_3)\sin\theta_5\sin\theta_6\right] + \sin\theta_1\left[\cos\theta_4\cos\theta_6 - \sin\theta_4\cos\theta_5\sin\theta_6\right]$$

$$r_{22} = \sin\theta_1\left[\cos(\theta_2+\theta_3)(-\cos\theta_4\cos\theta_5\cos\theta_6 - \sin\theta_4\cos\theta_6) + \sin(\theta_2+\theta_3)\sin\theta_5\sin\theta_6\right] - \cos\theta_1\left[\cos\theta_4\cos\theta_6 - \sin\theta_4\cos\theta_5\sin\theta_6\right]$$

$$r_{32} = -\sin(\theta_2+\theta_3)(-\cos\theta_4\cos\theta_5\sin\theta_6 - \sin\theta_4\cos\theta_6) + \cos(\theta_2+\theta_3)\sin\theta_5\sin\theta_6$$

$$r_{13} = -\cos\theta_1\left(\cos(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_4\sin\theta_5 + \sin(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_5\right) - \sin\theta_1\sin\theta_4\sin\theta_5$$

$$r_{23} = -\sin\theta_1\left(\cos(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_4\sin\theta_5 + \sin(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_5\right) - \cos\theta_1\sin\theta_4\sin\theta_5$$

$$r_{33} = \sin(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_4\sin\theta_5 - \cos(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_5$$

$$p_x = \cos\theta_1\left[a_2\cos\theta_2 + a_3\cos(\theta_2+\theta_3) - d_4\sin(\theta_2+\theta_3)\right] - d_3\sin\theta_1$$

$$p_y = \sin\theta_1\left[a_2\cos\theta_2 + a_3\cos(\theta_2+\theta_3) - d_4\sin(\theta_2+\theta_3)\right] + d_3\cos\theta_1$$

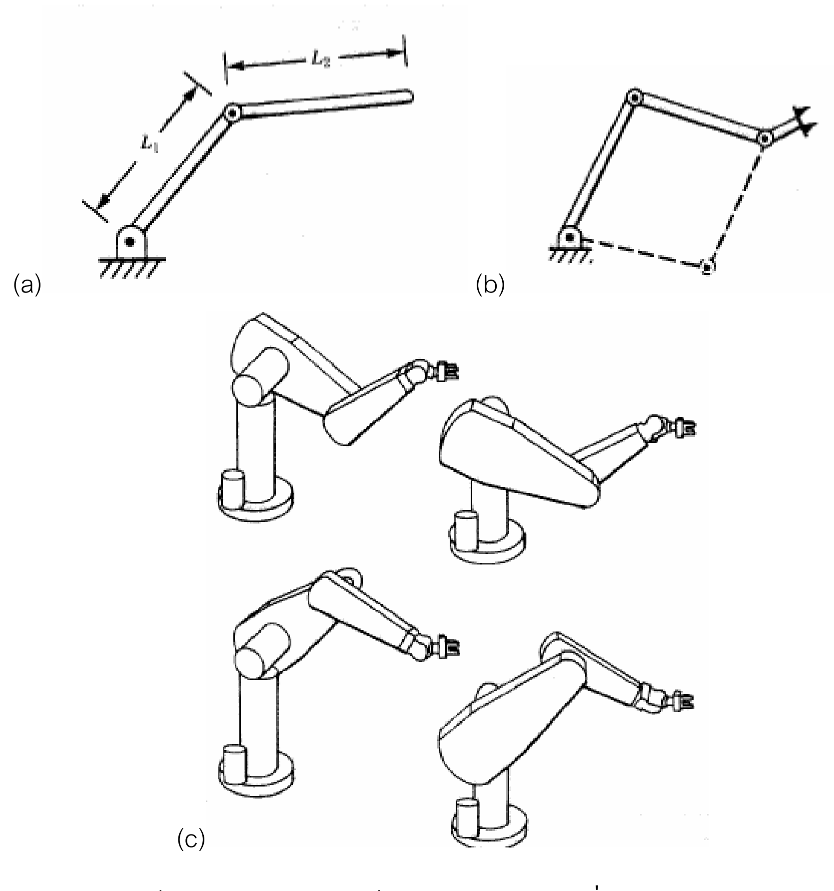
$$p_z = -a_3\sin(\theta_2+\theta_3) - a_2\sin\theta_2 - d_4\cos(\theta_2+\theta_3)$$

1.3 จลนศาสตร์ผกผันของแขนกล (Inverse kinematics of manipulator)

แขนกลส่วนใหญ่จะมาพร้อมกับอุปกรณ์ที่เรียกว่าแป้นสอน (teach pendant) เราสามารถสั่งงานให้แขนกลเคลื่อนไปอยู่ในลักษณะที่ต้องการ โดยการปรับพารามิเตอร์ของข้อต่อจากแป้นสอนจนแขนกลอยู่ในลักษณะที่พอใจ แล้วให้แป้นสอนจดจำพารามิเตอร์ของข้อต่อเหล่านี้ไว้ ในภายหลังหากเราต้องการให้แขนกลไปอยู่ในลักษณะเดิมอีก เราก็เพียงแต่ใช้แป้นสอนสั่งงานให้แขนกลเคลื่อนที่ไปยังจุดที่ได้จำไว้แล้ว แต่จะเห็นได้ว่าการสั่งงานในลักษณะนี้เราต้องทำงานในปริภูมิของพารามิเตอร์ของข้อต่อ ซึ่งไม่สะดวกโดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่ต้องการระบุพิกัดคาร์ทีเซียนและทิศทางของปลายแขน ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการคำนวณที่ตรงข้ามกับจลนศาสตร์ทางตรงของแขนกล นั่นก็คือเมื่อ

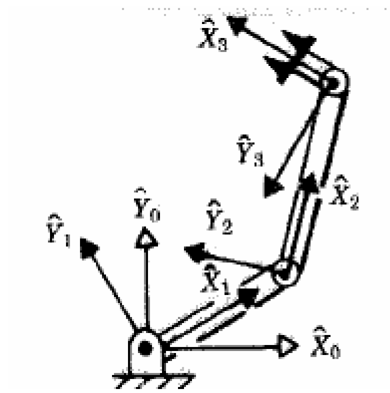
กำหนดพิกัดคาร์ทีเซียนและทิศทางในเฟรมที่หยุดนิ่งของปลายแขนให้ เราต้องการคำนวณพารามิเตอร์ของข้อต่อที่ทำให้ปลายแขนเรียงตัวในลักษณะที่กำหนด เราเรียกการคำนวณในลักษณะนี้ว่าการคำนวณจลนศาสตร์ผกผันของแขนกล

การคำนวณจลนศาสตร์ผกผันของแขนกลต้องคำนึงถึงสองเรื่องหลัก เรื่องแรกคือว่าพารามิเตอร์ของข้อต่อที่ต้องการอาจไม่มี เรื่องที่สองคือพารามิเตอร์คำตอบที่เป็นไปได้อาจมีหลายชุด รูปที่ 1.8(a) แสดงแขนกลที่มีข้อต่อแบบหมุนสองข้อต่อโดยท่อนแขนทั้งสองที่แสดงในรูปมีความยาวเป็น L_1 และ L_2 จะเห็นได้ว่าไม่มีพารามิเตอร์ของข้อต่อที่ทำให้ปลายแขนอยู่ห่างจุดหมุนที่ฐานเกิน $L_1 + L_2$ ไปได้ และหากกำหนดให้จุดปลายแขนอยู่ห่างจากจุดหมุนที่ฐานน้อยกว่า $L_1 + L_2$ หากแต่ละข้อต่อสามารถหมุนได้ครบรอบก็จะได้ว่ามีพารามิเตอร์คำตอบอย่างมากสองชุด ในรูปที่ 1.8(b) แสดงสองชุดของพารามิเตอร์ข้อต่อที่เป็นคำตอบสำหรับตำแหน่งและทิศทางของปลายแขนที่กำหนดให้ การมีพารามิเตอร์คำตอบมากกว่าหนึ่งชุด ถึงแม้จะทำให้ขั้นตอนการหาคำตอบอาจยุ่งยากกว่าการมีคำตอบเดียว แต่คุณสมบัตินี้ทำให้เราสามารถเลือกชุดพารามิเตอร์ข้อต่อที่เหมาะสมกับงานเป้าหมาย เช่นเราอาจเลือกใช้ชุดพารามิเตอร์ที่อ้อมหลบสิ่งกีดขวาง แขนกลที่ใช้งานจริงเช่น PUMA 560 ก็ได้ถูกออกแบบให้มีหลายชุดคำตอบ เช่นตามแสดงในรูปที่ 1.8(c) แขนกลมีสี่ชุดคำตอบที่ให้ตำแหน่งและทิศทางเดียวกันของปลายแขน



รูปที่ 1.8 (a) แขนกลสองข้อต่อ (b) แขนกลสามข้อต่อ (c) PUMA 560 ที่ปลายแขนตำแหน่งและทิศทางเดียวกัน

ขอยกตัวอย่างการคำนวณจลนศาสตร์ผกผันเพื่อให้เกิดความเข้าใจในขั้นตอนการหาพารามิเตอร์คำตอบ พิจารณาแขนกลที่มีสามข้อต่อในรูปที่ 1.1 พร้อมพารามิเตอร์ D-H ที่เกี่ยวข้องใน



รูปที่ 1.9 แขนกลที่มีสามข้อต่อพร้อมเฟรมที่กำหนดให้แต่ละท่อนแขน

ตารางที่ 1.1 พารามิเตอร์ D-H ของแขนกลในรูปที่ 1.9

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	l_1	0	θ_2
3	0	l_2	0	θ_3

ด้วยเฟรมที่กำหนดกับแต่ละท่อนแขนดังแสดงในรูปที่ 1.9 และพารามิเตอร์ D-H ที่เกี่ยวข้องในตารางที่ 1.1 เราสามารถเขียนเมทริกซ์การแปลงจากพิกัดในเฟรม 3 ไปยังพิกัดในเฟรม 0 ได้คือ

$$\mathbf{T}_{0,3} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & l_1\sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

แต่สำหรับการคำนวณจลนศาสตร์ผกผัน เราจะรับข้อมูลตำแหน่งและทิศทางของเฟรม 3 ซึ่งก็คือเมทริกซ์การแปลง

$$\mathbf{T}_{0,3} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & x \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

เป้าหมายของเราก็คือต้องหา $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ที่ทำให้เมทริกซ์การแปลงทั้งสองใน (1.1) และ (1.2) ที่กล่าวมาเท่ากัน ซึ่งนั่นก็คือทำให้

$$\cos\phi = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (1.3)$$

$$\sin\phi = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (1.4)$$

$$x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (1.5)$$

$$y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (1.6)$$

เรายกกำลังสอง (1.5) และ (1.6) แล้วนำมาบวกกันและใช้คุณสมบัติ $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2$ กับ $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2$ จะได้

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos\theta_2$$

ซึ่งก็คือ

$$\cos\theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \quad (1.7)$$

แน่นอนว่าจะหาค่า θ_2 ได้ก็ต่อเมื่อค่าของพจน์ทางขวาของ (1.7) มีค่าระหว่าง -1 และ 1 ซึ่งถ้าค่าดังกล่าวอยู่นอกช่วงนี้ก็แสดงว่าแขนกลนี้ไม่สามารถไปยังตำแหน่งและทิศทางที่กำหนดได้ เราหาค่า θ_2 ได้จากการหาค่า

$$\sin\theta_2 = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} \quad (1.8)$$

และใช้ค่า $\sin\theta_2$ ที่ได้ในสูตร

$$\theta_2 = \operatorname{atan2}(\sin\theta_2, \cos\theta_2) \quad (1.9)$$

เครื่องหมายบวกและลบที่เลือกได้ใน (1.8) แสดงถึงการมีพารามิเตอร์คำตอบมากกว่าหนึ่ง ซึ่งเมื่อเราได้ค่า θ_2 เราก็สามารถหาค่า θ_1 ได้จากการแทนค่า θ_2 ที่ได้ลงใน (1.5) และ (1.6) แล้วจัดรูปด้วยคุณสมบัติทางตรีโกณมิติ ผลที่ได้คือ

$$x = k_1 \cos\theta_1 - k_2 \sin\theta_1 \quad (1.10)$$

$$y = k_1 \sin\theta_1 + k_2 \cos\theta_1 \quad (1.11)$$

โดยที่ค่าคงตัว k_1, k_2 หาได้จาก $k_1 = l_1 + l_2 \cos\theta_2$ และ $k_2 = l_2 \sin\theta_2$ แต่ว่าเพื่อความสะดวกในการแก้สมการ (1.10) และ (1.11) เราเปลี่ยนวิธีเขียน k_1, k_2 โดยกำหนดให้ $r = +\sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ และ $\gamma = \text{atan2}(k_2 / r, k_1 / r)$ ซึ่งนั่นก็คือ

$$\begin{aligned} k_1 &= r\cos\gamma \\ k_2 &= r\sin\gamma \end{aligned} \qquad (1.12)$$

เราจึงเขียน (1.10) และ (1.11) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} x / r &= \cos\gamma\cos\theta_1 - \sin\gamma\sin\theta_1 = \cos(\gamma + \theta_1) \\ y / r &= \cos\gamma\sin\theta_1 + \sin\gamma\cos\theta_1 = \sin(\gamma + \theta_1) \end{aligned}$$

เราจึงได้ว่า $\gamma + \theta_1 = \text{atan2}(y / r, x / r)$ ซึ่งนั่นก็คือ $\theta_1 = \text{atan2}(y / r, x / r) - \text{atan2}(k_2 / r, k_1 / r)$ และเมื่อเรารู้ค่า θ_1 และ θ_2 แล้ว เราจึงหาค่าของ θ_3 ได้จากสมการ (1.3) และ (1.4)