1 จุดและเวกเตอร์

“ถ้าไม่มีตัวตนก็ไม่ใช่หุ่นยนต์” การมีรูปร่างตัวตนจับต้องได้เป็นคุณสมบัติอย่างหนึ่งของหุ่นยนต์ และสิ่งต่างๆ มากมายที่แวดล้อมเราอยู่ มนุษย์เรามีความสามารถในการรับรู้ในเรื่องความเป็นตัวตน เราสามารถแยกแยะได้ถึงความแตกต่างของการอยู่ตรงนี้ ตรงนั้น มีคนอื่นอยู่ข้างๆ มีของขวางอยู่ข้างหน้า มีหลุม มีบ่อตามทางเดินที่ต้องหลบ ฯลฯ ความรู้ตัวในเรื่องแบบนี้ดูเหมือนจะติดตัวเรามาตั้งแต่เกิด เรามีภาษาที่ใช้ในการบรรยายในเรื่องเหล่านี้มากมาย แต่ในบทนี้จะขอกล่าวถึงเฉพาะภาษาคณิตศาสตร์ที่เราจะใช้ในการระบุอย่างชัดเจนว่าอะไรอยู่ตรงไหน โดยเนื้อหาจะครอบคลุมสองเรื่องหลักคือ จุดและเวกเตอร์ เชื่อว่าทุกคนได้เคยเรียนเรื่องทั้งสองมาบ้างแล้วจากเรขาคณิตพื้นฐานในระดับมัธยมศึกษา แต่ที่ต้องนำมาบรรยายอีกในที่นี้ก็เพราะเกรงว่าบางคนอาจเข้าใจในเรื่องพื้นฐานนี้อย่างไม่ครบถ้วน และสองเรื่องนี้ก็เป็นหัวใจหลักในการทำความเข้าใจเนื้อหาในบทต่อไป จึงเห็นว่าเป็นเรื่องจำเป็นที่ต้องอธิบายให้ชัดเจน

1.1 เรขาคณิต

รากศัพท์ของคำว่า “geometry” ประกอบมาจากคำว่า geo ที่หมายถึงโลก และคำว่า metric ที่หมายถึงการวัด รวมกันแล้วบอกให้เรารู้ว่าวิชาเรขาคณิตเริ่มต้นมาจากความพยายามในการวัดทางภูมิศาสตร์ เช่นการวัดที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าว่ามีความกว้างและความยาวเท่าไร การวัดพื้นที่ของวงกลม การวัดระยะทางจากที่หนึ่งไปยังอีกที่หนึ่งเป็นต้น เรื่องของรูปร่าง ความยาว และระยะทางในแบบที่เราคุ้นเคยเป็นเรื่องที่นักคณิตศาสตร์สนใจมานานแล้ว จะถือว่าเป็นแขนงของคณิตศาสตร์ที่เก่าแก่ที่สุดตามที่มีบันทึกไว้ก็ว่าได้ เรขาคณิตในยุคแรก เริ่มต้นจากการทดลองและการสร้างสูตรสำเร็จเพื่อไปใช้ในชีวิตประจำวัน มีถูกบ้างผิดบ้าง เช่นชาวบาบิโลเนียนเมื่อประมาณ 6000 ปีมาแล้ว ก็มีสูตรคำนวณพื้นที่สี่เหลี่ยมจากการคูณความยาวกับความกว้าง (ถูกต้องเฉพาะในกรณีสี่เหลี่ยมผืนผ้า) เพื่อไปใช้ในการเก็บภาษี นอกจากนี้พวกเขาก็มีสูตรสำหรับคำนวณพื้นที่สามเหลี่ยมมุมฉาก และมีการบันทึกถึงความสัมพันธ์ของมุม วงกลม และสามเหลี่ยม อีกตัวอย่างที่ปฏิเสธไม่ได้ถึงความก้าวหน้าทางเรขาคณิตเมื่อ 5000 ปีมาแล้วคือ มหาปิรามิดที่เมืองกีซา ประเทศอียิปต์ ถึงแม้จะไม่มีบันทึกไว้ว่ากระบวนการก่อสร้างเป็นอย่างไร หินทรายที่แต่ละก้อนหนักประมาณสองตันครึ่งที่เรียงตัวกันอย่างพอเหมาะพอเจาะ การนำหินแกรนิตที่แต่ละก้อนหนักราวห้าสิบตันไปเรียงไว้บนยอดที่สูงจากฐานประมาณ 70 เมตร เหล่านี้เป็นหลักฐานชัดเจนถึงความรู้ที่ลึกซึ้งทางเรขาคณิตของอียิปต์โบราณ

รูปที่ 1.1 ปีรามิดในอียิปต์

เรขาคณิตเบี่ยงเบนจากการทดลองและการประยุกต์เป็นหลัก มาเป็นการหากฎเกณฑ์ที่สามารถอธิบายธรรมชาติของรูปร่างและระยะทางในสมัยกรีกโบราณ คนสำคัญที่สุดคนหนึ่งทางเรขาคณิตในยุคนี้ได้แก่ ยุคลิดแห่งอะเล็กซานเดรีย (Euclid of Alexandria) ที่มีชีวิตอยู่ในช่วงประมาณ 450-380 ปีก่อนคริศตกาล ผลงานที่เป็นที่รู้จักมากที่สุดของเขาคือชุดหนังสือเอลิเมนท์ (Elements) ซึ่งมีสิบสามเล่ม โดยมีเนื้อหาอธิบายความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตในธรรมชาติที่เราคุ้นเคย ชุดหนังสือนี้มีความโดดเด่นในการเรียบเรียงความรู้ทางคณิตศาสตร์อย่างมีระบบ มีการจัดเรียงนิยาม ประพจน์ และทฤษฎีบทที่เป็นต้นแบบของงานทางคณิตศาสตร์ในสมัยต่อมา และด้วยความครบถ้วนของกฎเกณฑ์ที่อธิบายธรรมชาติของระยะทางและมุม เราจึงเรียกเรขาคณิตในธรรมชาติที่เราคุ้นเคยว่าเรขาคณิตแบบยุคลิด[1] และเรียกเซตของจุดที่มีคุณสมบัติตามเรขาคณิตแบบยุคลิดว่าปริภูมิแบบยุคลิด โดยจะเรียกว่าระนาบแบบยุคลิดในกรณีของปริภูมิสองมิติ เรขาคณิตแบบยุคลิดในชุดหนังสือเอลิเมนท์อาจฟังดูแปลกหู แต่จริงๆแล้วเป็นเรื่องที่หลายคนต้องคุ้นเคย เพราะเนื้อหาบางส่วนอยู่ในคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ที่เน้นการสร้างรูปทางเรขาคณิตด้วยไม้บรรทัดและวงเวียนแบบไม่ต้องพะวงถึงเรื่องระบบพิกัด (เพราะว่าระบบพิกัดเกิดหลังสมัยของยุคลิดสองพันกว่าปี) เรื่องสำคัญๆ ได้แก่เรื่องสามเหลี่ยมคล้าย เรื่องเกี่ยวกับมุมของสามเหลี่ยม และเรื่องเกี่ยวกับมุมในวงกลม ประวัติความเป็นมาของเรขาคณิตเป็นเรื่องที่น่าสนใจมาก เพราะเป็นจุดกำเนิดของคณิตศาสตร์แขนงอื่นๆ มีอะไรเกิดขึ้นบ้างในเวลาสองพันกว่าปีกว่าที่จะเป็นเนื้อหาในตำราเลขให้เราได้เรียน หนังสือที่เล่าเรื่องเหล่านี้ได้ดีได้แก่

[1] เรขาคณิตที่เราคุ้นเคย จริงๆ แล้วไม่ได้เป็นกฎที่อธิบายธรรมชาติที่แท้จริง เป็นเพียงการประมาณด้วยประสาทรับรู้ของมนุษย์ จากทฤษฎีสัมพันธภาพและการค้นพบทางฟิสิกส์ เวลาและระยะทางไม่ได้เป็นอิสระต่อกัน และไม่สามารถอธิบายได้ด้วยเรขาคณิตแบบยุคลิด

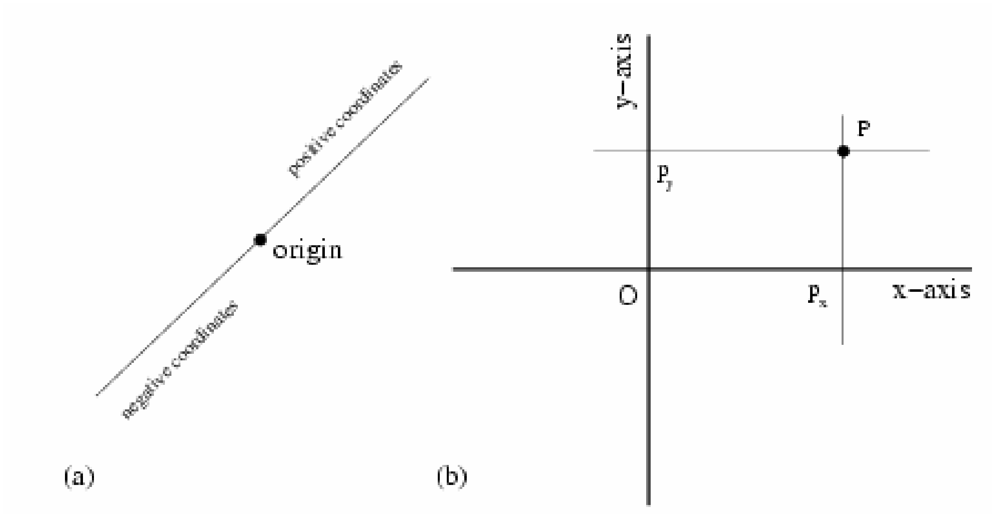
1.2 จุด

เราใช้คำว่าจุดในการบอกตำแหน่ง เช่นจุดกึ่งกลางหน้ากระดาษ จุดมุมซ้ายบน จุดศูนย์กลางของวงกลม จุดสีแดงตรงนั้น จุดสีขาวตรงนี้ ในทางเรขาคณิต จุดเป็นองค์ประกอบพื้นฐานที่สุดที่ถือว่าทุกคนรู้จักโดยไม่ต้องอธิบายว่ามันคืออะไร[2] จุดไม่มีขนาด มีเพียงแต่ตำแหน่งที่บอกว่ามันอยู่ที่ไหน เมื่อกล่าวถึงการระบุตำแหน่งของจุด หลายคนคงต้องนึกถึงระบบพิกัด ในปริภูมิหนึ่งมิติ เช่นเซตของจุดบนเส้นตรงเส้นหนึ่ง พิกัดของแต่ละจุดก็คือจำนวนจริงที่บอกตำแหน่งของจุดนั้นบนเส้นตรงโดยอ้างอิงกับจุดพิเศษจุดหนึ่งบนเส้นตรงนั้นที่เราเลือกขึ้นมาให้มีพิกัด 0 และเรียกว่าจุดกำเนิด เมื่อเราเอาจุดกำเนิดนี้ออกไป เส้นตรงจะถูกแบ่งออกเป็นสองส่วน โดยที่พิกัดของทุกจุดที่อยู่บนส่วนหนึ่งจะมีค่าเป็นบวก ในขณะที่พิกัดของทุกจุดบนอีกส่วนจะมีค่าเป็นลบ[3] และค่าสัมบูรณ์ของพิกัดของแต่ละจุดจะมีค่าเท่ากับระยะห่างระหว่างจุดนั้นกับจุดกำเนิด หลักการนี้ใช้ในระบบพิกัดของปริภูมิที่มีมิติสูงกว่าหนึ่งโดยใช้อันดับของจำนวนจริงในการบอกพิกัด(แทนที่จะใช้จำนวนจริงเพียงตัวเดียวอย่างในปริภูมิหนึ่งมิติ) ตัวอย่างที่ทุกคนคุ้นเคยคือระบบพิกัดตั้งฉากหรือพิกัดแบบคาร์ทีเซียนของระนาบแบบยุคลิด ระบบพิกัดแบบนี้ประกอบไปด้วยจุดหนึ่งในระนาบที่ถูกเลือกขึ้นมาเป็นจุดกำเนิดซึ่งมีพิกัด (0,0) และเส้นตรงสองเส้นที่ตั้งฉากกันและลากผ่านจุดกำเนิดนี้ โดยเราเรียกเส้นตรงทั้งสองว่าแกน ชื่อที่นิยมใช้ก็คือแกน x และแกน y โดยมีการกำหนดตำแหน่งบนแกนเหมือนกับพิกัดของเส้นตรงที่ได้กล่าวไปแล้ว พิกัดของจุดใดๆ บนระนาบก็คือคู่อันดับของจำนวนจริงที่ประกอบไปด้วยพิกัดของจุดนั้นบนแกนทั้งสอง การหาพิกัดบนแกนสามารถทำได้โดยหาตำแหน่งบนแกนของจุดตัดระหว่างแกนนั้นกับเส้นตรงที่ผ่านจุดที่ต้องการหาพิกัดและขนานกับอีกแกนหนึ่ง ยกตัวอย่างระบบพิกัดในรูปที่ 1.2 ซึ่งประกอบไปด้วยจุดกำเนิด *O* กับแกน x และแกน y พิกัดของจุด *P* ที่อยู่ในระนาบนี้คือคู่อันดับ (p_x, p_y) โดย p_x คือตำแหน่งที่เส้นตรงขนานแกน y และผ่านจุด *P* ตัดกับแกน x และในลักษณะเดียวกัน p_y ก็คือตำแหน่งที่เส้นตรงขนานแกน x และผ่านจุด *P* ตัดกับแกน y แต่ก่อนจะจบเรื่องนี้ ต้องจำไว้ว่าการมีตัวตนและตำแหน่งของจุดนั้นไม่ได้ขึ้นกับระบบพิกัด จุดๆ หนึ่งก็ยังอยู่ที่เดิมถึงแม้เราจะเปลี่ยนไปใช้ระบบพิกัดที่แตกต่างกันไป ระบบพิกัดมีไว้เพื่ออำนวยความสะดวกในการอ้างถึงจุดต่างๆ

---

[2] เวลาก็เป็นอีกอย่างที่โดยทั่วไปถือว่าทุกคนรู้จักดีและไม่ต้องมีนิยาม จริงๆ เรายังไม่สามารถให้คำนิยามกับจุดและเวลาด้วยองค์ประกอบอื่นที่พื้นฐานกว่า และทุกอย่างที่เรารู้จักก็ถูกอธิบายโดยใช้พื้นฐานของสองสิ่งนี้

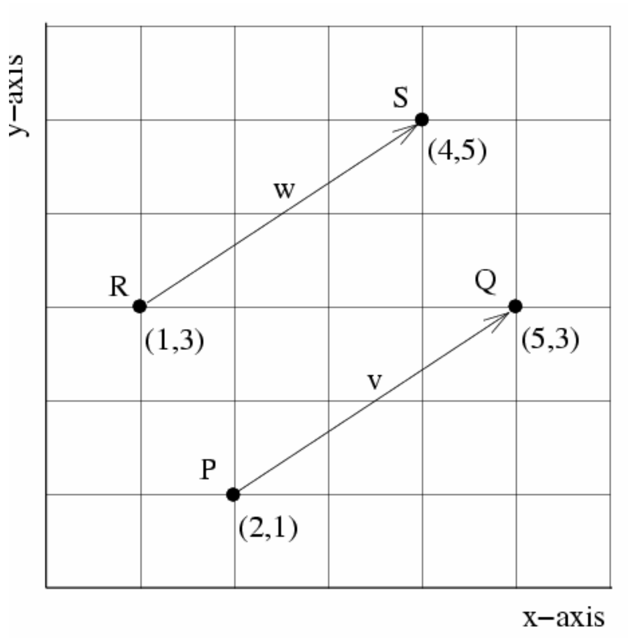
[3] จะใช้คำว่าจุดที่อยู่ทางขวาหรือทางซ้ายของจุดกำเนิดคงไม่เหมาะ เนื่องจากในปริภูมิหนึ่งมิติ คำว่าขวาและซ้ายไม่มีความหมายอะไร



รูปที่ 1.2 (a) พิกัดบนเส้นตรงและ (b)ตัวอย่างระบบพิกัดคาร์ทีเซียนบนระนาบ

1.3 เวกเตอร์

ถ้าคำว่าเวกเตอร์ไม่คุ้นหู อาจต้องย้อนไปอ่านในคำนำและทบทวนว่ามีพื้นฐานใดที่ยังขาดอยู่หรือไม่ ตามที่หลายคนต้องรู้อยู่แล้ว ปริมาณทางฟิสิกส์มีสองประเภทหลัก คือปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์ ปริมาณสเกลาร์เป็นปริมาณที่มีแต่ขนาดอย่างเดียว เช่น เวลา อุณหภูมิ มวล เป็นต้น ปริมาณทางสเกลาร์นี้เราบอกเพียงขนาดเป็นตัวเลขตัวเดียว (กับหน่วยที่ใช้) ก็ได้ใจความครบถ้วนเช่น เวลา 3 วินาที กระแสไฟฟ้า 1 แอมแปร์ เป็นต้น ส่วนปริมาณเวกเตอร์เป็นปริมาณที่ต้องมีทั้งขนาดและทิศทางจึงบอกความหมายได้สมบูรณ์ เวกเตอร์ต่างจากจุดตรงที่มันไม่มีตำแหน่ง ตัวอย่างที่นิยมอธิบายเช่นเวกเตอร์ความเร็ว รถยนต์คันหนึ่งที่วิ่งไปทางทิศเหนือ 60 ก.ม./ช.ม. สังเกตว่าไม่ว่ารถคันนี้วิ่งที่กรุงเทพหรือวิ่งที่เชียงใหม่ ความเร็วของมันก็แทนได้ด้วยเวกเตอร์เดียวกันตราบที่มันวิ่งไปทางทิศเหนือด้วยอัตราเร็ว 60 ก.ม./ช.ม. เท่ากัน นี่ก็เป็นเพราะเวกเตอร์ไม่ได้เก็บข้อมูลของตำแหน่ง สิ่งที่เวกเตอร์หมายถึงนั้นคือข้อมูลของการเปลี่ยนตำแหน่งต่างหาก ในทางเรขาคณิตเราใช้เวกเตอร์เพื่อบอกการขจัด (displacement) หรือการเปลี่ยนตำแหน่ง เช่นในรูปที่ 1.3 เรากล่าวได้ว่าจากจุด *P* ไปจุด *Q* จะต้องมีการขจัดไปทางขวา 3 หน่วยและการขจัดขึ้นบน 2 หน่วย วิธีเขียนบรรยายเวกเตอร์ที่นิยมวิธีหนึ่งคือการใช้ส่วนของเส้นตรงที่มีลูกศรปิดอยู่ด้านหนึ่ง โดยขนาดของส่วนของเส้นตรงจะแทนขนาดของเวกเตอร์และแนวการเรียงตัวกับทิศทางของหัวลูกศรจะแทนทิศทางของเวกเตอร์ เวลาที่เขียนแทนเวกเตอร์แบบนี้ต้องจำไว้ว่าจุดเริ่มต้นของส่วนของเส้นตรงไม่ได้มีความหมายอะไรเพราะเวกเตอร์ไม่มีตำแหน่ง ไม่ว่าจะเขียนที่ไหนถ้าสองเวกเตอร์มีขนาดและทิศทางเดียวกัน มันก็เป็นเวกเตอร์เดียวกันแน่นอน



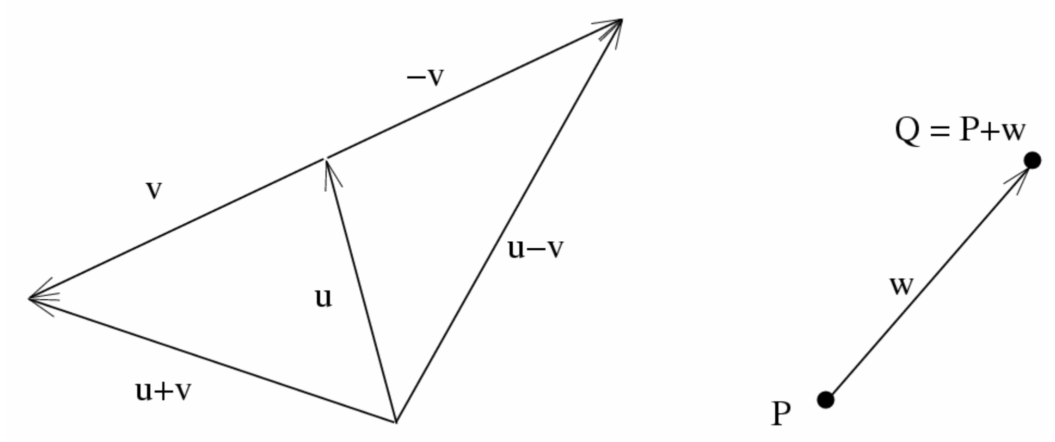
รูปที่ 1.3 แทนการขจัดด้วยเวกเตอร์

จะเห็นได้ว่าเราสามารถใช้เส้นที่มีหัวลูกศรในการเขียนแทนเวกเตอร์ และเมื่อเราใช้ระบบพิกัดฉากเข้าช่วยโดยเขียนเส้นที่มีหัวลูกศรลงบนระนาบที่มีพิกัดฉากนี้ เราก็สามารถเขียนแทนเวกเตอร์ได้ด้วยอันดับของตัวเลข เช่นเวกเตอร์ **w** ในรูปที่ 1.3 สามารถเขียนได้เป็น (3,2) ซึ่งหมายความว่าเวกเตอร์นี้แทนการขจัดไปทางขวาตามแนวแกน x เป็นระยะ 3 หน่วยและขึ้นบนตามแนวแกน y เป็นระยะ 2 หน่วย โดยจำนวนตัวเลขในอันดับจะเท่ากับมิติของปริภูมิที่พิจารณา และแต่ละตัวเลขจะบอกระยะขจัดในแนวแกนที่สอดคล้องกัน ด้วยการใช้ระบบพิกัดเพื่อเขียนเวกเตอร์ด้วยอันดับของตัวเลขแบบนี้ จะสังเกตเห็นได้ว่าเวกเตอร์ที่แสดงการขจัดจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดสามารถเขียนได้ในรูปของการลบพิกัดของจุดทั้งสองโดยนำพิกัดของจุดปลายไปลบออกจากพิกัดของจุดเริ่มต้น เช่น เวกเตอร์ **w** ในรูปที่ 1.3 สามารถหาได้จาก S-R = (4,5)-(1,3) = (4-1,5-3) = (3,2) เราสามารถหาเวกเตอร์ **v** ได้ด้วยวิธีเดียวกันโดยจะได้ผลลัพธ์คือ Q-P = (3,2) ซึ่งย้ำให้เห็นว่า **v** และ **w** เป็นเวกเตอร์เดียวกัน ตรงตามคุณสมบัติของเวกเตอร์ที่กล่าวถึงไปแล้ว

ถึงแม้ว่าเราสามารถเขียนทั้งจุดและเวกเตอร์ ด้วยอันดับของตัวเลขจากการใช้ระบบพิกัดฉากเข้าช่วย แต่ต้องระลึกไว้เสมอว่าจุดกับเวกเตอร์เป็นสองสิ่งที่แตกต่างกันโดยสิ้นเชิง การดำเนินการต่างๆ กับจุดและเวกเตอร์ที่ทำได้ต้องอยู่ภายใต้กติกาหลักดังต่อไปนี้

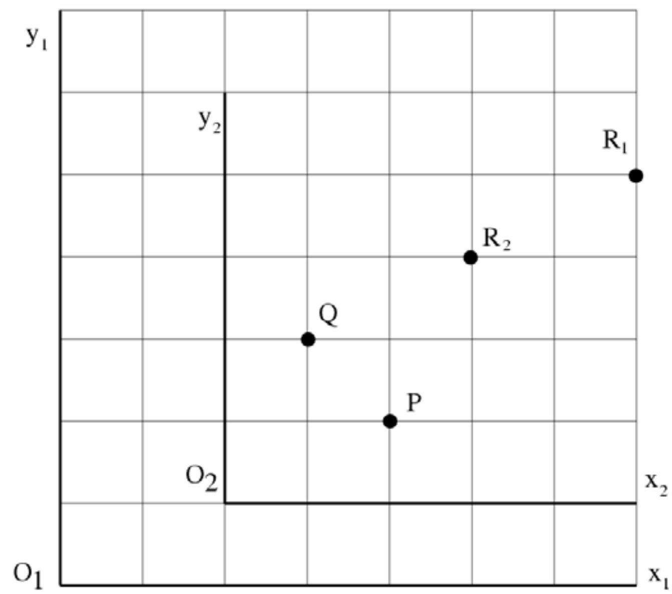
1. เวกเตอร์บวกหรือลบกับเวกเตอร์ได้เป็นเวกเตอร์ ผลลัพธ์สามารถหาได้จากการเขียนเวกเตอร์เป็นลูกศรต่อกัน หรือได้จากการบวกลบแต่ละองค์ประกอบของอันดับของตัวเลขที่แทนเวกเตอร์ทั้งสองเช่น กำหนดให้เวกเตอร์ **t** =(1,2) และ เวกเตอร์ **u** =(3,4) เราจะได้ **t+u** เป็นเวกเตอร์ (1+3,2+4) = (4,6) และได้ **t** – **u** เป็นเวกเตอร์ (1-3,2-4)=(-2,-2)

2. เวกเตอร์คูณกับตัวเลขแล้วได้เป็นเวกเตอร์ใหม่ที่มีทิศทางเดิมแต่มีขนาดเท่ากับขนาดเดิมคูณด้วยตัวเลขตัวนั้น เช่น กำหนดให้เวกเตอร์ $\mathbf{v}$ =(9,5) เราจะได้ว่า 3 $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ (3*9, 3*5)=(27,15)
3. จุดลบกับจุดได้เป็นเวกเตอร์เช่นที่ได้กล่าวถึงไปแล้ว
4. จุดบวกหรือลบกับเวกเตอร์ได้เป็นจุด เช่น กำหนดให้ เวกเตอร์ $\mathbf{w}$ =(5,9) และจุด *P*=(2,3) เราจะได้ *P*+ $\mathbf{w}$ เป็นจุดที่มีพิกัด (5+2,9+3)=(7,12) จริงๆ แล้วกฎข้อนี้เป็นการนำกฎข้อที่ 3 มากลับโดยย้ายจุดที่เป็นตัวลบมาอยู่อีกด้านของสมการ
5. ให้เวกเตอร์ $\mathbf{v}=(v_1,v_2,...,v_n)$ และ $\mathbf{w}=(w_1,w_2,...,w_n)$ เป็นสองเวกเตอร์ในปริภูมิของจำนวนจริง n มิติ ผลบวกภายใน (inner product หรือ dot product) ของทั้งสองเวกเตอร์ก็คือเวกเตอร์ที่เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ และหาได้จากสูตร $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\sum_{i=1}^{n} v_i w_i$
6. ขนาดของเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ใดๆ เขียนแทนได้ด้วย $|\mathbf{v}|$ หาได้จาก $|\mathbf{v}|=\sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$ และมุมระหว่างเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ กับ $\mathbf{w}$ หาได้จากสูตร $\cos^{-1}\left(\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}\right)$



รูปที่ 1.4 การบวกลบเวกเตอร์และการบวกจุดด้วยเวกเตอร์

อาจมีบางคนสงสัยว่าแล้วจุดบวกกับจุดได้อะไร ต้องขอบอกว่าจุดบวกกับจุดไม่มีความหมาย เพื่อให้กระจ่างว่าที่กล่าวถึงนี้หมายความว่าอย่างไร ลองดูตัวอย่างต่อไปนี้ก่อน

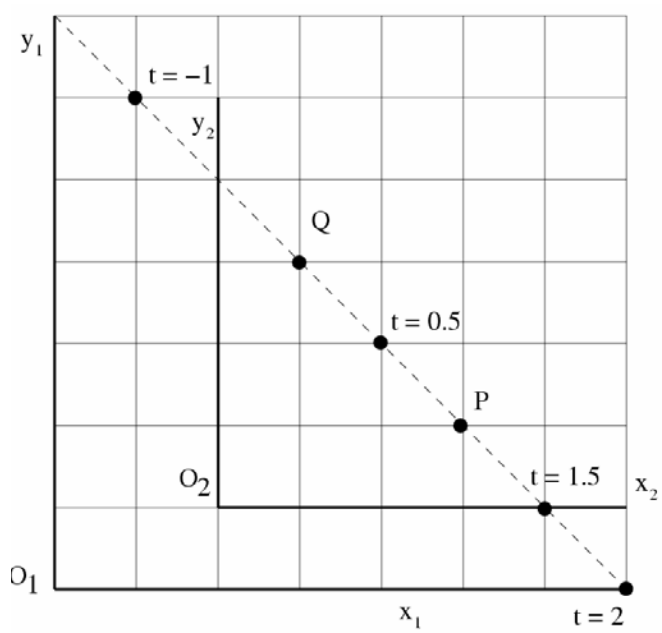


รูปที่ 1.5 การบวกจุดไม่มีความหมาย

ในรูปที่ 1.5 เรากำหนดให้มีสองระบบพิกัดฉากบนระนาบที่พิจารณา โดยระบบแรกมี O_1 เป็นจุดกำเนิดกับแกนฉาก x_1 และ y_1 ส่วนระบบที่สองมี O_2 เป็นจุดกำเนิดกับแกนฉาก x_2 และ y_2 จะเห็นได้ว่าพิกัดของจุด P และจุด Q บนระบบพิกัดแรกคือ (4,2) และ (3,3) ตามลำดับ ซึ่งถ้าสมมุติว่าจุดบวกกันได้ เราก็จะได้ผลบวกคือ (7,5) นั่นก็คือจุด R_1 ในรูปที่ 1.5 แต่คราวนี้ลองพิจารณาการบวกแบบเดียวกันในกรณีที่เขียนจุดด้วยระบบพิกัดที่สอง เราได้พิกัดของจุด P และจุด Q บนระบบพิกัดนี้คือ (2,1) และ (1,2) และผลบวกก็คือ (3,3) ซึ่งก็คือจุด R_2 ในรูปที่ 1.5 …. แต่ว่าจุด R_1 เป็นคนละจุดกับจุด R_2 แล้วจุดไหนเป็นผลบวกที่ถูกต้องกันแน่ล่ะ คำตอบก็คือไม่มี เพราะการบวกจุดแบบนี้ไม่มีความหมายทางเรขาคณิต จุดจะอยู่ตรงไหนนั้นไม่ได้ขึ้นกับระบบพิกัด หรือจะกล่าวได้ว่าระบบพิกัดไม่ใช่คุณสมบัติของจุด จุดหนึ่งๆ ก็ยังอยู่ที่เดิมแม้เราจะใช้ระบบพิกัดต่างกันในการบอกว่ามันอยู่ตรงไหน ดังนั้นถ้าจุดจะบวกกันได้ ก็ต้องได้ผลลัพธ์เป็นจุดเดียวกันเสมอไม่ว่าจะทำการบวกบนพิกัดใดก็ตาม

แต่ก็มีการดำเนินการแบบหนึ่งกับจุด ที่คล้ายกับการบวก แต่ว่าผลลัพธ์ไม่ขึ้นกับระบบพิกัดที่ใช้ การดำเนินการที่กล่าวถึงนี้คือการรวมสัมพรรค (affine combination) โดยผลรวมสัมพรรคของสองจุด P และ Q คือจุดที่มีพิกัด $tP+(1-t)Q$ โดย t เป็นจำนวนจริงใดๆ ตัวอย่างในรูปที่ 1.6 แสดงการบวกสัมพรรคของจุด P และ Q เมื่อ t มีค่าเป็น -1, 0.5, 1.5 และ 2 บนระบบพิกัดฉากสองแบบ จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้สำหรับแต่ละค่า t นั้นเป็นจุดเดิม ไม่ว่าจะใช้ระบบพิกัดใด สังเกตว่าจุดผลลัพธ์จะอยู่บนเส้นตรงที่ลากผ่าน P และ Q เสมอ และหาก $0 \le t \le 1$ จุด

ผลลัพธ์จะอยู่บนส่วนของเส้นตรงที่เชื่อม P และ Q ซึ่งในกรณีหลังนี้ผลรวมที่ได้มีชื่อพิเศษว่าผลรวมเชิงคอนเวกซ์ (convex combination)



รูปที่ 1.6 ตัวอย่างการรวมสัมพรรค

จริงๆ แล้วการที่ผลรวมสัมพรรคไม่ได้ขึ้นกับระบบพิกัดนั้น สามารถอธิบายได้ง่ายๆ ด้วยการพิจารณาสูตรผลรวมโดยให้ $R = tP + (1-t)Q$ เมื่อกระจายพจน์ที่สองทางด้านขวา เราจะได้ $R = tP + Q - tQ$ นั่นก็คือ $R = t(P-Q) + Q$ โดยตามกฎข้อสามที่กล่าวไปแล้ว $P-Q$ ได้เป็นเวกเตอร์ โดยเวกเตอร์นี้จะมีทิศทางจาก Q ไป P และมีขนาดเท่ากับระยะห่างระหว่าง P กับ Q เสมอ เมื่อนำไปคูณกับสเกลาร์ t ก็ยังเป็นเวกเตอร์ และเมื่อบวกกับจุด Q ก็จึงได้เป็นจุดผลลัพธ์ R ตามกฎข้อสี่ จะเห็นได้ว่าเมื่อรู้จุด P และ Q เราก็สามารถเขียนจุดผลลัพธ์ R ลงบนระนาบได้โดยไม่ต้องรู้ระบบพิกัดที่ใช้ นั่นก็คือผลลัพธ์ของการบวกสัมพรรคไม่ได้ขึ้นกับระบบพิกัด การรวมสัมพรรคนี้ยังสามารถใช้กับจุดมากกว่าสองจุด ยกตัวอย่างเช่นผลรวมสัมพรรคของสามจุด $t_1P_1 + t_2P_2 + (1-t_1-t_2)P_3$ โดย P_1, P_2 และ P_3 เป็นจุดบนระนาบและ t_1 กับ t_2 เป็นจำนวนจริง ด้วยการกระจายพจน์สุดท้ายของผลรวม เราจะเขียนผลรวมได้เป็น

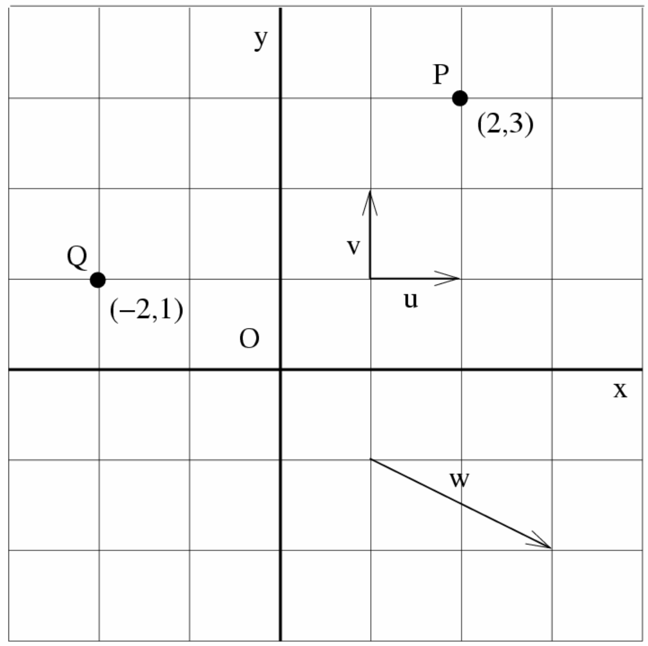
$$t_1P_1 + t_2P_2 - t_1P_3 - t_2P_3 + P_3 = t_1(P_1 - P_3) + t_2(P_2 - P_3) + P_3$$

ซึ่งก็อยู่ในรูปเวกเตอร์บวกกับจุดที่ได้ผลลัพธ์เป็นจุด จากตัวอย่างนี้ ถ้าสามจุด P_1, P_2 และ P_3 ไม่ได้อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน เราสามารถที่จะเขียนจุดใดๆ ก็ได้บนระนาบในรูปของผลรวมสัมพรรคของพวกมันด้วยการเปลี่ยนค่าของ t_1 และ t_2 เนื่องจากว่าทุกจุดบนระนาบสามารถถูกเขียนได้ด้วยวิธีนี้ เราจึงสามารถใช้ค่าของ t_1 และ t_2 เป็นค่าพิกัด โดยพิกัดแบบนี้มีชื่อว่า พิกัดแบบแบรีเซนทริก (barycentric coordinates)

1.4 ระบบพิกัดเอกพันธ์ (Homogeneous Coordinate System)

ที่ผ่านมา เราเขียนทั้งจุดและเวกเตอร์ด้วยการใช้อันดับของตัวเลขระบุค่าของแต่ละพิกัดบนแกนในระบบพิกัดฉาก แต่ว่าการเขียนแบบนี้ เราต้องบอกด้วยว่าตัวที่เขียนอยู่นั้นเป็นเวกเตอร์หรือเป็นจุด ทำให้บางครั้งอาจไม่สะดวกที่จะนำไปใช้ในการคำนวณที่ต้องยุ่งเกี่ยวกับทั้งจุดและเวกเตอร์ในเวลาเดียวกัน เพราะผู้ใช้จะต้องระวังที่จะไม่เขียนสูตรที่มีการดำเนินการที่ไม่ถูกกติกา เช่นการบวกจุดกับจุด ซึ่งหากมีความผิดพลาดเกิดขึ้นแล้ว ก็อาจไม่ง่ายที่จะตรวจสอบ

เพื่อแก้ปัญหานี้ เรามีวิธีการเขียนจุดและเวกเตอร์อีกแบบด้วยอันดับของตัวเลข ที่เราสามารถบอกจากอันดับนั้นได้เลยว่า ที่เขียนนั้นเป็นจุดหรือเวกเตอร์ วิธีที่กล่าวถึงนี้คือระบบพิกัดเอกพันธ์ หัวใจของระบบพิกัดเอกพันธ์คือการใช้เวกเตอร์พิกัดร่วมกับจุดกำเนิด โดยในปริภูมิ n มิติมีเวกเตอร์พิกัด n ตัว เวกเตอร์พิกัดแต่ละตัวมีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับแต่ละแกนบวก หลักการของระบบพิกัดแบบนี้ก็คือ เวกเตอร์ใดๆ สามารถเขียนได้ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์พิกัด และจุดใดๆ ก็สามารถเขียนได้ในรูปของจุดกำเนิดบวกกับเวกเตอร์ที่เหมาะสม พิกัดในระบบนี้ก็คือการกำหนดว่าจะเอาเวกเตอร์พิกัดและจุดกำเนิดมาบวกกันอย่างไรเพื่อให้ได้เป็นจุดหรือเวกเตอร์ที่ต้องการ ลองดูตัวอย่างในรูปที่ 1.7 เราเขียนระบบพิกัดฉากลงบนระนาบโดยมี O เป็นจุดกำเนิดกับแกนฉาก x และ y ดังนั้นเราได้เวกเตอร์พิกัดเป็นเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยทิศทางตามแกน $+x$ และ $+y$ แสดงในรูปคือเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ ตามลำดับ เราสามารถเขียนจุด P ได้ในรูปผลบวกเชิงเส้น $2\mathbf{u}+3\mathbf{v}+O$ และพิกัดเอกพันธ์ของมันก็คือ (2,3,1) โดยสังเกตว่า 1 ตัวสุดท้ายบอกว่า P เป็นจุดเพราะได้จากการเอาเวกเตอร์ $2\mathbf{u}+3\mathbf{v}$ ไปบวกกับจุด O เช่นเดียวกันพิกัดเอกพันธ์ของจุด Q ก็คือ (-2,1,1) แต่สำหรับเวกเตอร์ $\mathbf{w}$ นั้น พิกัดเอกพันธ์ของมันคือ (2,-1,0) ที่ต้องมีศูนย์เป็นตัวสุดท้ายก็เพื่อบอกว่าต้องการเฉพาะเวกเตอร์ สรุปได้ว่าระบบพิกัดเอกพันธ์ที่จริงก็ขยายมาจากพิกัดฉากโดยเพิ่มอีกหนึ่งพิกัดที่บอกว่าเป็นเวกเตอร์หรือเป็นจุด ซึ่งถ้าเป็นจุดพิกัดนี้จะมีค่าเป็นหนึ่ง แต่ถ้าเป็นเวกเตอร์จะเป็นศูนย์ จะเห็นได้ว่าเมื่อเราเขียนจุดและเวกเตอร์ด้วยพิกัดเอกพันธ์แล้ว หากมีการดำเนินการที่ไม่อนุญาตเช่น การบวกจุด P กับ Q เราก็จะได้ผลลัพธ์เป็น (2,3,1) + (-2,1,1) = (0,4,2) ซึ่งมีพิกัดสุดท้ายเป็น 2 อันไม่มีความหมายในระบบพิกัดนี้ บอกให้เรารู้ว่ามีอะไรที่ไม่ถูกต้องเกิดขึ้น ลองหาผลรวมแบบสัมพรรคของจุดที่เขียนด้วยพิกัดเอกพันธ์ เราจะเห็นได้ว่าได้ผลลัพธ์ที่มีพิกัดสุดท้ายเป็นหนึ่งเสมอ แสดงให้เห็นว่าได้ผลลัพธ์เป็นจุด ตรงตามที่กล่าวไว้



รูปที่ 1.7 ระบบพิกัดเอกพันธ์