1 การหมุน

หลายคนคงเคยคอเคล็ดทำให้หมุนศีรษะได้ไม่สะดวก และคงจำได้ว่ามันเป็นประสบการณ์ที่น่ารำคาญ เพราะเมื่อเราสูญเสียความสามารถในการหมุน การเคลื่อนที่ไปยังเป้าหมายที่ต้องการจะถูกจำกัดลงหรืออาจเป็นไปไม่ได้เลย ลองจินตนาการเล่นๆ ว่าหากไม่มีการหมุน จะมีอะไรเปลี่ยนแปลงไปบ้าง การหมุนเป็นพื้นฐานของระบบกลไกที่เราพบเห็นทั่วไปในชีวิตประจำวัน วิชาการออกแบบระบบจักรกลโดยเฉพาะเรื่องเกียร์ (gear) ครอบคลุมการเปลี่ยนการหมุนไปเป็นการเคลื่อนที่แบบต่างๆ มากมาย (ดู

รูปที่ 1.1 แล้วลองคิดดูว่าเกียร์แต่ละแบบทำงานอย่างไร) การหมุนเป็นส่วนประกอบของหุ่นยนต์แทบทุกชนิด ในบทนี้เราจะศึกษาเรื่องของการหมุน โดยจะพิจารณาการหมุนในสองและสามมิติ

รูปที่ 1.1 เกียร์สำหรับเปลี่ยนการหมุนไปเป็นการเคลื่อนที่แบบต่างๆ

1.1 ปริภูมิ (space)

สำหรับนักคณิตศาสตร์ คำว่าปริภูมิในภาษาไทยที่ตรงกับคำว่า space ในภาษาอังกฤษนั้น หมายถึงโลกส่วนตัวที่นักคณิตศาสตร์สร้างขึ้น โดยสมาชิกที่อาศัยอยู่ในโลกนี้จะต้องมีคุณสมบัติตามกฎที่นักคณิตศาสตร์กำหนดขึ้นอย่างเคร่งครัด

1.1.1 **ปริภูมิเวกเตอร์** (vector space)

ปริภูมิเวกเตอร์เป็นโลกที่ประกอบไปด้วยสมาชิกสองประเภทคือสกาลาร์และเวกเตอร์

สกาลาร์ คือสมาชิกที่มาพร้อมกับตัวดำเนินการพื้นฐานสองตัว ตามธรรมเนียมแล้วจะเรียกว่าการบวก และการคูณ และเขียนแทนด้วยเครื่องหมาย + และ · โดยสกาลาร์สองตัวมาบวกหรือคูณกันก็จะได้ผลลัพธ์เป็นสกาลาร์เสมอ นั่นก็คือถ้ากำหนดให้ S คือเซตของสกาลาร์เราจะได้ว่า $\forall \alpha, \beta \in S, \alpha + \beta \in S, \alpha \cdot \beta \in S$ นอกจากนี้สกาลาร์ยังต้องมีคุณสมบัติกระจายได้ สลับที่ได้ และจัดกลุ่มได้ ดังเมื่อกำหนดให้ $\alpha, \beta, \gamma \in S$ จะได้ว่า

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$
$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$
$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$
$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$
$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$$

ในบรรดาสกาลาร์ทั้งหมด เรามีสกาลาร์พิเศษอยู่สองตัวคือเอกลักษณ์การบวก (additive identity) เขียนแทนด้วย 0 และเอกลักษณ์การคูณ (multiplicative identity) ซึ่งเขียนแทนด้วย 1 โดยที่สำหรับสกาลาร์ α ใดๆ เราจะได้ว่า

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$
$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$$

นอกจากนี้สำหรับสกาลาร์ α ใดๆ มันต้องมีตัวผกผันการบวก (additive inverse) เขียนแทนด้วย $-\alpha$ และตัวผกผันการคูณ (multiplicative inverse) ซึ่งเขียนแทนด้วย α^{-1} โดยตัวผกผันนี้มีคุณสมบัติคือ

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$
$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$$

เราเรียกระบบสกาลาร์ที่มีคุณสมบัติดังกล่าวว่าฟีลด์ของสกาลาร์ (scalar field) ตัวอย่างของฟีลด์ของสกาลาร์คือระบบจำนวนจริงภายใต้การบวกและการคูณที่เราคุ้นเคย

เวกเตอร์ คือสมาชิกที่มาพร้อมกับการดำเนินการสองตัวคือการบวกเวกเตอร์กับเวกเตอร์ และการคูณสกาลาร์กับเวกเตอร์ โดยผลลัพธ์ของการดำเนินการทั้งสองก็จะได้เป็นเวกเตอร์เสมอ นอกจากนี้เวกเตอร์ยังมีคุณสมบัติการสลับที่

การกระจาย และการจัดกลุ่มภายใต้การดำเนินการทั้งสอง นั่นก็คือถ้าให้ $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในปริภูมิเวกเตอร์ V และ α กับ β เป็นสมาชิกแบบสกาลาร์แล้ว เราจะได้ว่า

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$$
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$
$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$
$$\alpha\mathbf{v} \in V$$
$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$$
$$(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$$

ในปริภูมิเวกเตอร์มีเวกเตอร์พิเศษตัวหนึ่งคือเวกเตอร์ 0 ซึ่งมีคุณสมบัติคือ $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ สำหรับเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ใดๆ ตัวอย่างของปริภูมิเวกเตอร์ที่เราคุ้นเคยก็คือปริภูมิ n มิติของจำนวนจริง (เขียนแทนว่า $\mathbb{R}^n$) แต่ละเวกเตอร์ในปริภูมินี้ก็คืออันดับของจำนวนจริง n ตัว ผลบวกของสองเวกเตอร์ก็หาได้จากการบวกทีละตัวตามลำดับ และการคูณกับสกาลาร์ (เป็นจำนวนจริงในกรณีนี้) ก็ได้จากการนำสกาลาร์จำนวนจริงตัวนั้นไปคูณกับจำนวนจริงแต่ละตัวของเวกเตอร์ นั่นก็คือถ้ากำหนดให้เวกเตอร์ $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ และ $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ ผลบวกของเวกเตอร์ $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ก็คือ $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$ และผลคูณของเวกเตอร์ $\mathbf{a}$ กับสกาลาร์จำนวนจริง α ก็คือ $\alpha\mathbf{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, ..., \alpha a_n)$ ด้วยการดำเนินการที่กล่าวถึงนี้จะเห็นได้ว่า $\mathbb{R}^n$ มีคุณสมบัติครบถ้วนที่จะเป็นปริภูมิเวกเตอร์

หลักการที่ต้องกล่าวถึงเกี่ยวกับปริภูมิเวกเตอร์คือเรื่องของผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ความอิสระเชิงเส้น (linear independence) มิติ (dimension) และเรื่องของฐานหลัก (basis) ขอสรุปอย่างคร่าวๆ ดังนี้ (รายละเอียดหาอ่านได้จากหนังสือเรียนพีชคณิตเชิงเส้นทุกเล่ม)

- ผลรวมเชิงเส้นของ n เวกเตอร์ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ คือเวกเตอร์ที่เขียนในรูป $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i$ โดย α_i เป็นสกาลาร์
- เวกเตอร์ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ เป็นอิสระเชิงเส้นหากผลรวมเชิงเส้น $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i$ ได้เป็นเวกเตอร์ $\mathbf{0}$ ในกรณีเดียวเท่านั้นคือเมื่อ $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$
- มิติของปริภูมิเวกเตอร์คือจำนวนเวกเตอร์สูงสุดที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน
- เซตของเวกเตอร์ที่มีจำนวนเท่ากับมิติของปริภูมิเวกเตอร์และเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันสามารถใช้เป็นฐานหลักของปริภูมิได้ เวกเตอร์ใดๆ ในปริภูมิเวกเตอร์นี้สามารถเขียนได้ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ฐานหลัก

1.1.2 **ปริภูมิสัมพรรค** (affine space)

ปริภูมิเวกเตอร์ไม่สามารถบรรยายเรขาคณิตที่เราคุ้นเคยได้อย่างครบถ้วน ดังที่ได้กล่าวไปแล้วในบทที่แล้ว จะเห็นได้ว่าเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ บอกปริมาณเวกเตอร์ทางฟิสิกส์ สามารถบอกขนาดและทิศทางแต่ไม่มีข้อมูลบอกตำแหน่ง ปริภูมิสัมพรรคสร้างขึ้นด้วยการเพิ่มสมาชิกอีกประเภทให้กับปริภูมิเวกเตอร์ สมาชิกที่เพิ่มเข้ามาก็คือจุด โดยจุดจะมาพร้อมกับการดำเนินการหนึ่งตัวคือ การลบจุดกับจุด ผลลัพธ์ของการลบจะได้เป็นเวกเตอร์ นั่นก็คือหาก P และ Q เป็นจุด เราจะได้ว่า $\mathbf{v} = P - Q$ เป็นเวกเตอร์ ด้วยการลบที่กล่าวถึง เราได้การดำเนินการอีกตัวคือการบวกจุดกับเวกเตอร์ ผลลัพธ์จะเป็นจุด เราไม่สามารถใช้ระบบพิกัดธรรมดาแบบที่เราใช้กับปริภูมิเวกเตอร์ในการกำหนดปริภูมิสัมพรรคได้ เพราะมันไม่สามารถที่จะเขียนบอกจุดในปริภูมิสัมพรรคได้ ปริภูมิสัมพรรคถูกกำหนดได้โดยเขียนบอกเฟรม (frame) ของมัน เฟรมประกอบไปด้วยจุดพิเศษที่เรียกว่าจุดกำเนิด (origin) และเวกเตอร์ฐานหลัก สำหรับปริภูมิสัมพรรคที่มี P_0 เป็นจุดกำเนิด และ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ เป็นเวกเตอร์ฐานหลัก เราสามารถเขียนจุดใดๆ ในรูป

$$P_0 + \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{u}_n$$

และเวกเตอร์ใดๆ ในรูป

$$\beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + ... + \beta_n\mathbf{u}_n$$

จะเห็นได้ว่าเราสามารถเขียนทั้งจุดและเวกเตอร์ด้วยสกาลาร์ n ตัว แต่การเขียนลักษณะนี้เราไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นจุดหรือเวกเตอร์ จึงเป็นที่มาของพิกัดเอกพันธ์ที่ได้กล่าวถึงไปในบทที่แล้ว

1.1.3 **ปริภูมิยูคลิด** (Euclidean space)

ปริภูมิยูคลิดคือปริภูมิสัมพรรคที่เพิ่มการดำเนินการระหว่างสองเวกเตอร์ที่เรียกว่าการคูณภายใน (inner product) เราเขียน $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ เพื่อแทนผลคูณภายในของเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ เมื่อให้ $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ เป็นเวกเตอร์และ α, β เป็นสกาลาร์ ผลคูณภายในต้องมีคุณสมบัติต่อไปนี้

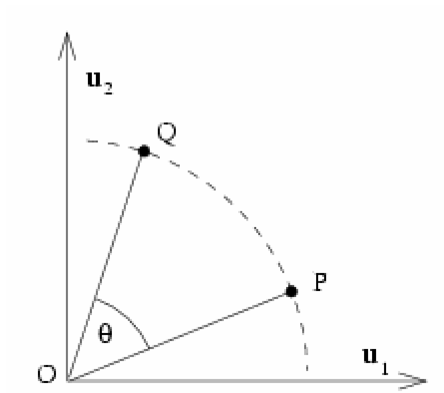
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$$
$$(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} + \beta\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$$
$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} > 0 \quad (\mathbf{v} \neq \mathbf{0})$$
$$\mathbf{0}\cdot\mathbf{0} = 0$$

ผลคูณภายในนี้ใช้เป็นตัวบอกขนาดของเวกเตอร์ โดยขนาดของเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ สามารถเขียนในรูป $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$ เมื่อขนาดของเวกเตอร์ถูกกำหนด ระยะห่างระหว่างจุดก็ถูกกำหนดตาม โดยระยะห่างระหว่างจุด P และ Q ถูกนิยามว่าคือ $|P - Q| = \sqrt{(P-Q)\cdot(P-Q)}$ นอกจากนี้ผลคูณภายในยังทำให้เราสามารถอธิบายเรื่องของมุม โดยมุม θ ระหว่างเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ สามารถหาได้จาก $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)$ ด้วยการคูณภายในที่เพิ่มเข้ามา ทำให้เรื่องของขนาดของเวกเตอร์ ระยะห่างระหว่างจุด และเรื่องมุมมีความหมายขึ้นมา ทำให้ปริภูมิยูคลิดสามารถใช้อธิบายระบบเรขาคณิตที่เราคุ้นเคยได้อย่างครบถ้วน

1.2 การหมุนในสองมิติ

เราศึกษาเรื่องการหมุนเพื่อให้สามารถคำนวณผลของการหมุน และให้สามารถบอกทิศทางการเรียงตัว (orientation) ของวัตถุ พิจารณาปริภูมิยูคลิดสองมิติบนจำนวนจริง กำหนดพิกัดฉากคาร์ทีเซียนที่มีจุดกำเนิด O และเวกเตอร์แกน $\mathbf{u}_1$ และ $\mathbf{u}_2$ เราสนใจว่าสำหรับจุด $P = O + p_1\mathbf{u}_1 + p_2\mathbf{u}_2$ ที่กำหนดให้นั้น หากเราหมุนมันรอบจุดกำเนิดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม $0 \le \theta \le \pi$ แล้ว จุด P จะไปอยู่ที่ไหน (รูปที่ 1.2) สมมุติว่ามันเคลื่อนไปอยู่ที่จุด Q เมื่อเราเขียนจุด P และ Q ในรูปเวกเตอร์แนวตั้งนั่นคือ $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ และ $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ เราสามารถเขียนได้ว่า $Q = \mathbf{R}P$ โดยที่

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



รูปที่ 1.2 หมุนจุด P รอบ O ทวนเข็มเป็นมุม θ

เราสามารถตรวจทานว่าสูตรนี้ถูกต้องโดยตรวจสอบดังต่อไปนี้

จากสูตรลองเขียน $|OQ|$ ได้ว่า

$$|OQ|^2 = (p_1\cos\theta - p_2\sin\theta)^2 + (p_1\sin\theta + p_2\cos\theta)^2 = p_1^2 + p_2^2$$
$$= p_1^2 + p_2^2 = |OP|^2$$

นั่นก็คือเราจะได้ว่า $|OP| = |OQ|$ ถูกต้อง

เราทดสอบว่ามุมระหว่างเวกเตอร์ OP และ OQ เป็นเท่าไรด้วยการหาผลคูณภายใน เราจะได้ว่า

$$OP \cdot OQ = p_1(p_1\cos\theta - p_2\sin\theta) + p_2(p_1\sin\theta + p_2\cos\theta)$$
$$= (p_1^2 + p_2^2)\cos\theta$$
$$= |OP||OQ|\cos\theta$$

นั่นก็คือมุมระหว่างทั้งสองเวกเตอร์คือ θ จริง

ที่เหลือต้องทดสอบก็คือ OQ อยู่ในทิศทางทวนเข็มของของ OP ซึ่งทำได้โดยการหาผลคูณไขว้ $OP \times OQ$

$$
\begin{aligned}
OP \times OQ &= p_1(p_1 \sin\theta + p_2 \cos\theta) - p_2(p_1 \cos\theta - p_2 \sin\theta) \\
&= (p_1^2 + p_2^2)\sin\theta
\end{aligned}
$$

ได้ผลตามที่ต้องการสรุปว่าสูตรถูกต้อง

เราเรียกเมตริก $\mathbf{R}$ ในสูตรว่าเมตริกการหมุน โดยใช้หลักการตามการทดสอบที่กล่าวถึงไปแล้ว เราสามารถแสดงได้ว่าเมตริกการหมุนนี้ต้องมีคุณสมบัติอย่างไร สมมุติว่า $\mathbf{R}$ เป็นเมทริกซ์ที่หมุนเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ไปเป็นเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ นั่นก็คือ $\mathbf{v} = \mathbf{Ru}$ เราจะได้ว่า $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ ต้องมีขนาดเท่ากัน ซึ่งเขียนได้ว่า $|\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}|^2$ เรารู้ว่า

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}^T\mathbf{u}$$

และ

$$|\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{Ru})^T(\mathbf{Ru}) = \mathbf{u}^T\mathbf{R}^T\mathbf{Ru}$$

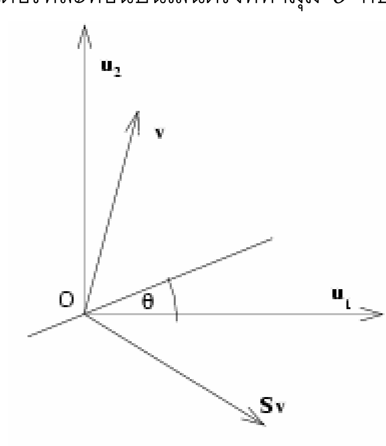
นั่นก็คือ

$$\mathbf{u}^T\mathbf{R}^T\mathbf{Ru} = \mathbf{u}^T\mathbf{u}$$

ซึ่งหมายความว่า $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$ นั่นก็คือ $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ เราเรียกเมทริกซ์ที่มีคุณสมบัติเช่นนี้ว่าเมทริกซเชิงตั้งฉาก (orthogonal matrix) และจาก $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$ เราเขียนได้ว่า $\det(\mathbf{R}^T\mathbf{R}) = \det(\mathbf{R})^2 = \det(\mathbf{I}) = 1$ หมายความว่า $\det(\mathbf{R}) = 1$ หรือ $\det(\mathbf{R}) = -1$ กรณีแรกเท่านั้นที่ทำให้ $\mathbf{R}$ เป็นเมทริกซ์การหมุน กรณีหลังทำให้ $\mathbf{R}$ เป็นเมทริกซ์ที่แทนการสะท้อน (reflection) เมทริกซ์การสะท้อนสามารถเขียนได้ในรูป

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

โดย $\mathbf{Sv}$ ก็คือเวกเตอร์ที่สะท้อนบนเส้นตรงที่ทำมุม θ กับแกน $\mathbf{u}_1$ (รูปที่ 1.3)



รูปที่ 1.3 การสะท้อน v ด้วยเมทริกซ์การสะท้อน S

สังเกตได้ว่าหากเรานำเมทริกซ์การหมุนมาคูณกันก็จะได้เป็นเมทริกซ์การหมุน ถ้า $\mathbf{R}_\alpha$ และ $\mathbf{R}_\beta$ เป็นเมทริกซ์การหมุนทวนเข็มด้วยมุม α และ β ตามลำดับ เราจะได้ว่าผลคูณ $\mathbf{R}_\alpha\mathbf{R}_\beta$ จะแทนการหมุนทวนเข็มด้วยมุม $\alpha+\beta$ แต่สำหรับเมทริกซ์การสะท้อนหากเรานำมาคูณกันเป็นจำนวนคู่ ผลที่ได้จะกลายเป็นเมทริกซ์การหมุน หากกำหนดให้ $\mathbf{S}_\alpha$ และ $\mathbf{S}_\beta$ เป็นเมทริกซ์การสะท้อนรอบเส้นที่ทำมุม α และ β กับแกน $\mathbf{u}_1$ ตามลำดับ เราจะได้ว่า

$$\mathbf{S}_\alpha\mathbf{S}_\beta=\begin{bmatrix}\cos 2(\alpha-\beta) & -\sin 2(\alpha-\beta)\\ \sin 2(\alpha-\beta) & \cos 2(\alpha-\beta)\end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็นเมทริกซ์แทนการหมุนทวนเข็มด้วยมุม $2(\alpha-\beta)$

1.3 การเคลื่อนที่ในสองมิติ

การเคลื่อนที่ในสองมิติประกอบไปด้วยการหมุนรอบจุดกำเนิดและการเลื่อน ในหัวข้อนี้เราจะแสดงให้เห็นว่าการเคลื่อนที่ใดๆ ก็ตาม สามารถเขียนในรูปของการหมุนรอบจุดแกน (pole of rotation) ที่สามารถคำนวณได้จากการหมุนและการเลื่อนที่กำหนดให้ พิจารณาการเคลื่อนที่โดยการหมุนด้วยเมทริกซ์ $\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ ตามด้วยการเลื่อนด้วยเวกเตอร์ $\mathbf{d}=\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix}$ ให้ Q' เป็นจุดที่ได้จากการใช้การเคลื่อนที่นี้กับจุด Q นั่นก็คือเราสามารถเขียนได้ว่า

$$Q'=\mathbf{R}Q+\mathbf{d}$$

หากการเคลื่อนที่นี้สามารถเขียนแทนด้วยการหมุนรอบจุดแกน จะต้องมีจุดแกน $P=\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\end{pmatrix}$ ซึ่งไม่เคลื่อนที่ด้วยการเคลื่อนที่ที่กำหนดให้ นั่นคือ

$$P=\mathbf{R}P+\mathbf{d}$$

แก้สมการเพื่อหาค่า p_1 และ p_2 จะได้ว่า

$$p_1=\left(d_1\sin\frac{\theta}{2}-d_2\cos\frac{\theta}{2}\right)\Big/2\sin\frac{\theta}{2}$$

$$p_1=\left(d_1\cos\frac{\theta}{2}+d_2\sin\frac{\theta}{2}\right)\Big/2\sin\frac{\theta}{2}$$

จะเห็นได้ว่าหาก θ ลดลงจนถึง 0 จะได้ว่า $\sin\dfrac{\theta}{2}$ ลดลงจนถึง 0 เป็นผลให้จุด P เลื่อนออกไปในแนวตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\mathbf{d}$ เป็นระยะอนันต์

จริงๆ แล้วเราสามารถเขียนแทนการเคลื่อนที่ด้วยเมทริกซ์เดียว (เหมือนการหมุน) ด้วยการใช้พิกัดเอกพันธ์ในการเขียนจุดและเวกเตอร์ การเคลื่อนที่ด้วยการหมุนด้วยเมทริกซ์ $\mathbf{R}$ ตามด้วยการเลื่อนด้วยเวกเตอร์ $\mathbf{d}$ สามารถเขียนแทนด้วยเมทริกซ์

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & d_1 \\ \sin\theta & \cos\theta & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ด้วยการใช้การเคลื่อนที่ดังกล่าวกับจุด $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ มันจะเคลื่อนไปอยู่ที่จุด $Q' = \begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \\ 1 \end{pmatrix}$ โดยที่ $Q' = \mathbf{T}Q$ เราเรียกการเขียนแทนการเคลื่อนที่ด้วยเมทริกซ์เดียวในลักษณะนี้ว่าการแปลงเอกพันธ์ (homogeneous transformation) ด้วยการแปลงเอกพันธ์ เราสามารถคำนวณจุดแกนของการหมุนด้วยการใช้หลักการการหาค่าลักษณะเฉพาะ (eigen value) นั่นก็คือหากจุด P เป็นจุดแกน เราจะสามารถเขียนได้ว่า P เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda = 1$

พิจารณาสมการ

$$\lambda P = \mathbf{T}P$$

ซึ่งก็คือ

$$(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})P = \mathbf{0}$$

และเขียนได้ว่า

$$\det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

นั่นก็คือ

$$\det\begin{bmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta & d_1 \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda & d_2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

ได้เป็นสมการ

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1) = 0$$

ชัดเจนว่า $\lambda = 1$ ซึ่งสัมพันธ์กับจุดแกนเป็นคำตอบหนึ่ง นอกจากนี้เรายังได้ $\lambda = e^{i\theta}$ และ $\lambda = e^{-i\theta}$ สองค่าหลังนี้จะให้เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะในรูป $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ และ $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ 0 \end{pmatrix}$ เราสามารถสร้างเวกเตอร์ $\mathbf{c}_1$ และ $\mathbf{c}_2$ ได้จาก $\mathbf{x}$ และ $\mathbf{x}^*$ ได้ดังนี้

$$\mathbf{c}_1 = (\mathbf{x} + \mathbf{x}^*)/2$$

$$\mathbf{c}_2 = i(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)/2$$

เราได้ว่า

$$\mathbf{T}\mathbf{c}_1 = \cos\theta\mathbf{c}_1 + \sin\theta\mathbf{c}_2$$
$$\mathbf{T}\mathbf{c}_2 = -\sin\theta\mathbf{c}_1 + \cos\theta\mathbf{c}_2$$

นั่นก็คือระนาบที่แผ่ด้วยเวกเตอร์ $\mathbf{x}$ และ $\mathbf{x}^*$ นั้นไม่แปรเปลี่ยนด้วยการแปลงเอกพันธ์ $\mathbf{T}$

1.4 เฟรม

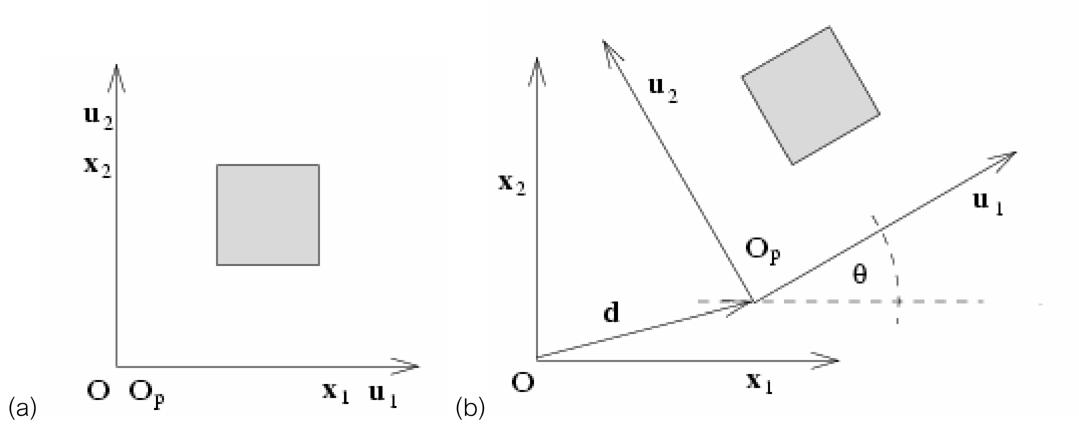
ที่ผ่านมาเราได้กล่าวถึงเฉพาะการเคลื่อนที่ของจุด แต่ที่เราสนใจสำหรับงานหุ่นยนต์คือการเคลื่อนที่ของวัตถุ เราสนใจว่าเมื่อหมุนวัตถุไปแล้วมันจะเรียงตัวอยู่ในทิศทาง (orientation) อย่างไร เมื่อเลื่อนวัตถุไปแล้วมันจะไปอยู่ในตำแหน่งอย่างไร เนื้อหาที่เราพิจารณาจะครอบคลุมเฉพาะการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง (rigid object) วัตถุแข็งเกร็งคือวัตถุที่เราถือว่ามันคงรูปร่างเดิมตลอดเวลา หมายความว่าสำหรับคู่จุด P และ Q ใดๆ บนวัตถุนี้ ระยะห่าง $|PQ|$ ต้องคงที่เสมอไม่ว่ามันจะเคลื่อนที่ไปที่ใดก็ตาม พิจารณาการเคลื่อนที่ด้วยการหมุนด้วยเมทริกซ์ $\mathbf{R}$ ตามด้วยการเลื่อนด้วยเวกเตอร์ $\mathbf{d}$ สมมุติว่าผลของการเคลื่อนที่นี้ทำให้จุด P เคลื่อนไปอยู่ที่จุด $P' = \mathbf{R}P + \mathbf{d}$ และจุด Q เคลื่อนไปอยู่ที่จุด $Q' = \mathbf{R}Q + \mathbf{d}$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|P' - Q'|^2 &= |(\mathbf{R}P + \mathbf{d}) - (\mathbf{R}Q + \mathbf{d})|^2 \\
&= |\mathbf{R}P - \mathbf{R}Q|^2 \\
&= (\mathbf{R}(P - Q))^T(\mathbf{R}(P - Q)) \\
&= (P - Q)^T\mathbf{R}^T\mathbf{R}(P - Q)
\end{aligned}$$

เพราะ $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$ เราจึงได้ว่า $|P' - Q'| = |P - Q|$ นั่นก็คือการหมุนแล้วตามด้วยการเลื่อนสามารถบรรยายการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็งได้

ทุกจุดของวัตถุแข็งเกร็งชิ้นหนึ่งต้องเคลื่อนที่ไปด้วยกันเสมอ ดังนั้นเราจึงสามารถเขียนบอกการเคลื่อนที่ของมันโดยบอกเมทริกซ์การหมุนและเวกเตอร์สำหรับเลื่อน แทนที่เราจะใช้การเคลื่อนที่นี้กับแต่ละจุดบนวัตถุโดยตรง เราสามารถที่จะกำหนดเฟรมและพิจารณาให้วัตถุชิ้นนี้อยู่กับที่ในเฟรมที่กำหนดให้ แล้วใช้การเคลื่อนที่ที่ต้องการกับเฟรมนี้แทน ดูตัวอย่างในรูปที่ 1.4 กำหนดให้เฟรมหลัก F เป็นเฟรมที่ไม่เคลื่อนที่ประกอบไปด้วยจุดกำเนิด O และเวกเตอร์แกน $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ และเฟรมของวัตถุ F_p ประกอบด้วยจุดกำเนิด O_p และเวกเตอร์แกน $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ เขียนแบบสั้นได้ว่า $F = (O, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ และ $F_p = (O_p, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ วัตถุรูปสี่เหลี่ยมจะอยู่กับที่ในเฟรมวัตถุ F_p เสมอ (ทุกจุดของวัตถุมีพิกัดบน F_p ที่ไม่เปลี่ยนแปลง) เมื่อเริ่มต้น เฟรมวัตถุ F_p อยู่ทับกับเฟรมหลัก F ดังแสดงในรูปที่ 1.4(a) ต่อมา

วัตถุเคลื่อนที่โดยการหมุนทวนเข็มด้วยมุม θ และเลื่อนตามเวกเตอร์ $\mathbf{d}$ เราสามารถเขียนบรรยายการเคลื่อนที่นี้ได้โดยระบุว่าการเคลื่อนที่นี้เกิดขึ้นกับเฟรม F_p (จุดกำเนิด O_p และแกน $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ เคลื่อน) ดังแสดงในรูปที่ 1.4(b) การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นกับเฟรมวัตถุนี้ที่จริงก็คือคอนฟิกุเรชันของวัตถุนั่นเอง แน่นอนว่าวัตถุเคลื่อนที่เมื่อวัดพิกัดของมันในเฟรมหลัก F จุดที่มีพิกัด Q ในเฟรม F_p จะมีพิกัด $\mathbf{R}Q + \mathbf{d}$ ในเฟรมหลัก F



รูปที่ 1.4 การเคลื่อนที่ของเฟรมวัตถุสัมพันธ์กับเฟรมหลัก

เราสามารถพิจารณาการเคลื่อนที่เป็นการดำเนินการชนิดหนึ่งที่ทำกับเฟรม การเคลื่อนที่แบบหนึ่งแล้วตามด้วยการเคลื่อนที่อีกแบบจึงสามารถถูกแทนได้ด้วยการเรียกใช้การดำเนินการที่สัมพันธ์กันเป็นลำดับเรียงกันไป ดังที่ได้กล่าวไปแล้วว่าผลของการเคลื่อนจุดๆ หนึ่ง สามารถคำนวณได้จากการคูณเมทริกซ์การแปลงเอกพันธ์กับจุดนั้นที่เขียนในพิกัดเอกพันธ์ ดังนั้นผลของการเคลื่อนจุด P ด้วยเมทริกซ์ $\mathbf{S}$ ตามด้วยเมทริกซ์ $\mathbf{T}$ จะทำให้จุด P เคลื่อนไปอยู่ที่จุด $P' = \mathbf{TS}P$ สังเกตุว่าเราคูณด้วย $\mathbf{S}$ ก่อนแล้วจึงคูณข้างหน้าด้วย $\mathbf{T}$ โดยเมทริกซ์ $\mathbf{TS}$ ที่ได้จะแทนการเคลื่อนที่รวมของการเคลื่อนที่ทั้งสองนี้ เรื่องความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ผลลัพธ์กับลำดับการคูณเมทริกซ์เป็นเรื่องที่สับสนได้ง่าย เพื่อความเข้าใจที่ชัดเจนขึ้น พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

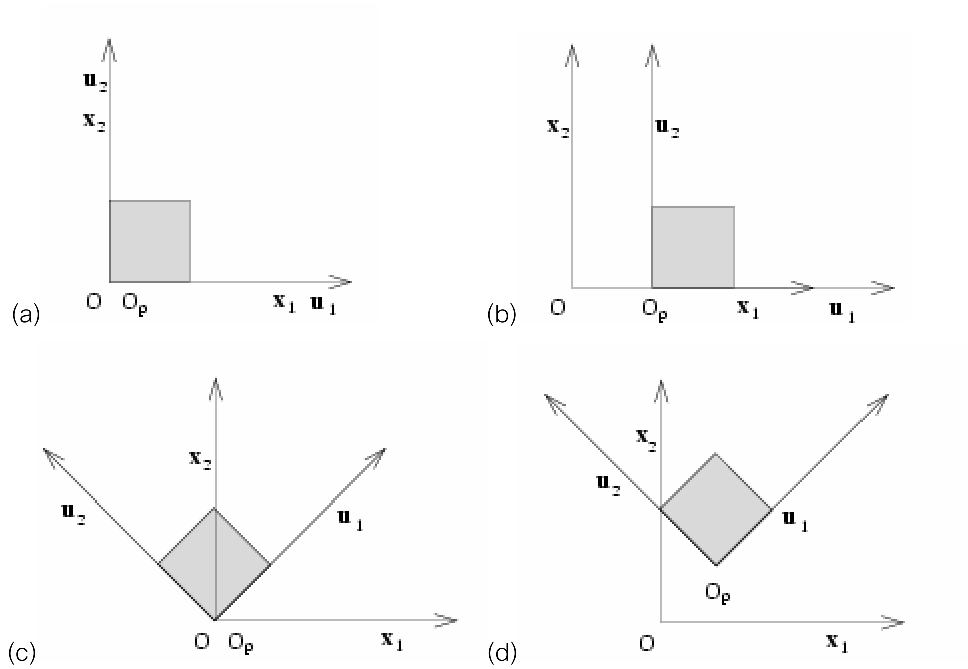
ให้เฟรมหลัก $F = (O, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ อยู่กับที่และ $F_p = (O_p, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ เป็นเฟรมของวัตถุรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกว้างหนึ่งหน่วย เริ่มต้นด้วยเฟรมทั้งสองอยู่ทับกัน ให้ $\mathbf{S}$ และ $\mathbf{T}$ เป็นเมทริกซ์ที่แทนการเคลื่อนที่โดย

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เป็นการหมุนทวนเข็มรอบจุดกำเนิดด้วยมุม 45 องศาและ

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เป็นการเลื่อนไปตามแนวนอนของเฟรมเป็นระยะหนึ่งหน่วย กำหนดให้ P เป็นจุดมุมขวาบนของรูปสี่เหลี่ยมในรูปที่ 1.5(a) โดยมีพิกัดเอกพันธ์ใน F_p คือ $(1,1,1)^T$



รูปที่ 1.5 การเคลื่อนที่สองจังหวะ

ลองพิจารณากันว่าการเคลื่อนที่ด้วยเมทริกซ์ $\mathbf{ST}$ ทำให้เกิดผลอย่างไร มีวิธีพิจารณาสองวิธีคือ

1. พิจารณา $\mathbf{ST}$ จากขวาไปซ้าย หรือแบบที่เรียกว่าการคูณข้างหน้า (pre-multiplication) โดยลองดูว่า $\mathbf{ST}$ ทำให้จุด P เคลื่อนทีไปอย่างไร เรารู้ว่าหลังการเคลื่อนที่นี้จุด P จะไปอยู่ที่พิกัดเอกพันธ์ใน F เท่ากับ $\mathbf{ST}P$ การเคลื่อนทีแบ่งเป็นสองจังหวะ โดยจังหวะแรกเฟรม F_p จะถูกเลื่อนไปตามแนวนอนของ F (ตามแกน $\mathbf{x}_1$) เป็นระยะหนึ่งหน่วยดังแสดงในรูปที่ 1.5(b) เป็นผลให้จุด P เลื่อนไปอยู่ที่พิกัด $P' = \mathbf{T}P$ ในจังหวะที่สองเฟรม F_p จะถูกหมุนรอบจุดกำเนิด O ของ F ทวนเข็มเป็นมุม 45 องศา ดังแสดงในรูปที่ 1.5(d) การหมุนนี้ทำให้จุดมุมขวาบนเคลื่อนไปอยู่ที่พิกัด $\mathbf{S}P'$
2. พิจารณา $\mathbf{ST}$ จากซ้ายไปขวา หรือแบบที่เรียกว่าคูณข้างหลัง (post-multiplication) ในแบบนี้เราจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของเฟรม F_p โดยการเคลื่อนที่จะเทียบกับเฟรม F_p ในขณะนั้นไม่ได้เทียบกับเฟรมหลักเหมือนการพิจารณาแบบขวาไปซ้าย การเคลื่อนที่มีสองจังหวะ ในจังหวะแรกเฟรม F_p หมุนทวนเข็ม 45 องศารอบจุดกำเนิด O_p ตามที่กำหนดใน $\mathbf{S}$ ผลลัพธ์แสดงในรูปที่ 1.5(c) จากนั้นเฟรม F_p เลื่อนไปตาม

แนวนอนของมัน (ตามแกน $\mathbf{u}_1$) เป็นระยะหนึ่งหน่วยได้ผลลัพธ์แสดงในรูปที่ 1.5(d) เหมือนการพิจารณาแบบขวาไปซ้าย

ถึงแม้การพิจารณาทั้งสองแบบจะให้ผลสุดท้ายที่เหมือนกัน แต่การตีความหมายที่แตกต่างกันนำไปสู่การใช้งานที่ต่างกัน โดยสรุปแบบขวาไปซ้ายจะมองการเคลื่อนที่เกิดขึ้นเทียบกับเฟรมหลักตลอดเวลา แต่ในแบบซ้ายไปขวาการเคลื่อนที่แต่ละจังหวะที่เกิดขึ้นจะเทียบกับเฟรมวัตถุก่อนเกิดการเคลื่อนที่นั้นๆ เสมอ

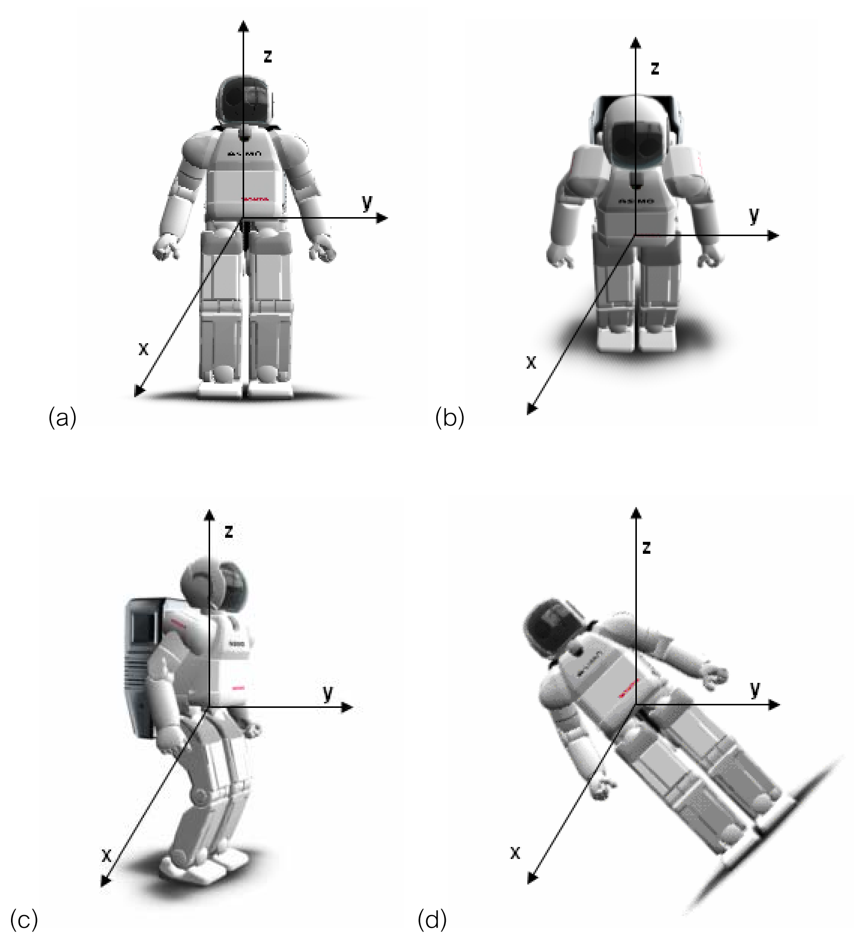
1.5 การหมุนในสามมิติ

การหมุนในสามมิติมีความซับซ้อนกว่าการหมุนในสองมิติมาก การหมุนรอบจุดกำเนิดในสองมิติต้องการให้ระบุเพียงมุมที่ต้องการหมุน (มุมเป็นบวกหมุนทวนเข็ม เป็นลบหมุนตามเข็ม) ก็เพียงพอแล้ว นั่นคือการหมุนในสองมิติมีองศาเสรี (degree of freedom) เท่ากับหนึ่ง แต่สำหรับการหมุนรอบจุดกำเนิดในสามมิตินั้น เราต้องระบุแกนหมุนและมุมที่จะหมุน การกำหนดแกนหมุนทำได้โดยการกำหนดเวกเตอร์ทิศทางของแกน ถึงแม้เราต้องใช้เลขสามตัวในการระบุเวกเตอร์นี้แต่ขนาดของเวกเตอร์ที่แตกต่างกันก็ไม่ทำให้ได้แกนที่แตกต่างกัน นั่นก็คือองศาเสรีของแกนหมุนมีเพียงสอง ซึ่งเมื่อรวมกับมุมหมุน จึงได้ว่าองศาเสรีของการหมุนรอบจุดกำเนิดในสามมิติมีค่าเท่ากับสาม

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาเฉพาะการหมุนรอบจุดกำเนิดอย่างเดียว ในลักษณะเดียวกันกับสองมิติการหมุนในสามมิติสามารถเขียนได้เป็นเมทริกซ์การหมุน โดยในกรณีนี้เมทริกซ์การหมุนจะมีขนาดสามคูณสาม การสร้างเมทริกซ์การหมุนรอบแกนใดๆ ไม่ใช่เรื่องธรรมชาติ จึงขอเริ่มด้วยการพิจารณาเมทริกซ์สำหรับหมุนรอบแกนหลัก $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ ดังต่อไปนี้

1. เมทริกซ์การหมุนรอบแกน $\mathbf{z}$ ด้วยมุม θ คือ $\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ผลของการหมุนไม่ทำให้พิกัดในแนวแกน $\mathbf{z}$ เปลี่ยนและทิศทางการหมุนเป็นไปตามกฎมือขวา
2. เมทริกซ์การหมุนรอบแกน $\mathbf{y}$ ด้วยมุม θ คือ $\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$
3. เมทริกซ์การหมุนรอบแกน $\mathbf{x}$ ด้วยมุม θ คือ $\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

ดูตัวอย่างการหมุนในรูปที่ 1.6 โดยเริ่มต้นหุ่นอยู่ในสภาพตามรูปที่ 1.6(a) ในรูปที่ 1.6(b), (c), (d) แสดงผลของการหมุนจากสภาพเริ่มต้นไปเป็นมุม 45 องศารอบแกน $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ และ $\mathbf{x}$



รูปที่ 1.6 การหมุนรอบแกนหลักในสามมิติ

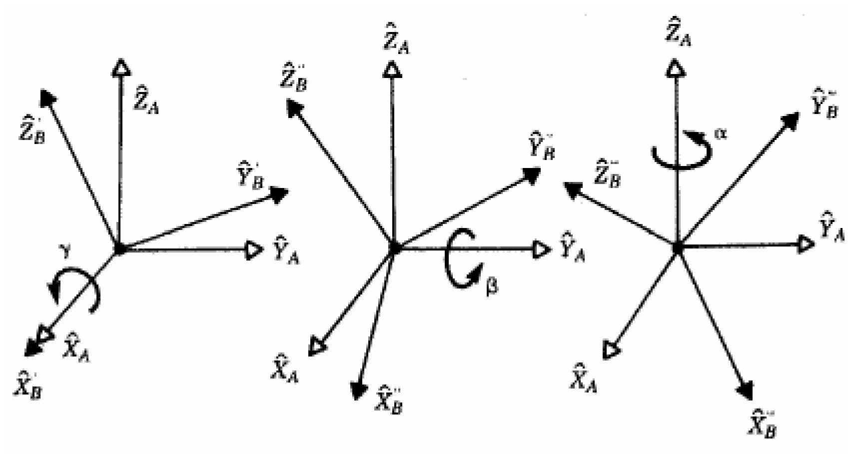
การหมุนรอบแกนหลักนี้สามารถนำมาเขียนเรียงต่อกันเป็นการหมุนที่มีองศาเสรีครบสาม วิธีการเขียนมีสองแบบคือ

1. เขียนจากขวาไปซ้ายเป็นการหมุนเฟรมวัตถุเทียบกับเฟรมหลักที่อยู่นิ่ง (เหมือน pre-multiplication) โดยจะหมุนรอบแกน $\mathbf{x}$ ก่อนแล้วหมุนรอบแกน $\mathbf{y}$ จากนั้นหมุนรอบแกน $\mathbf{z}$ การหมุนแบบนี้ถูกเรียกว่า X-Y-Z fixed angles หรือ roll, pitch, yaw เมทริกซ์การหมุนที่ได้คือ

$$\mathbf{R}_{xyz}(\gamma,\beta,\alpha)=\mathbf{R}_z(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_x(\gamma)=$$

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma\\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{bmatrix}$$



รูปที่ 1.7 การหมุนแบบ X-Y-Z fixed angles

ต้องจำไว้ว่าสูตรนี้สำหรับการหมุนที่ทำเป็นลำดับตายตัวคือรอบแกนของเฟรมหลักคือรอบแกน $\mathbf{x}$ เป็นมุม γ รอบแกน $\mathbf{y}$ เป็นมุม β และรอบแกน $\mathbf{z}$ เป็นมุม α นอกจากการเปลี่ยนจากมุมไปเป็นเมทริกซ์ การแก้ปัญหาที่กลับกันคือหาค่ามุมหมุนรอบแกนต่างๆ จากเมทริกซ์การหมุนที่กำหนดให้ก็มีประโยชน์อยู่บ่อยๆ พิจารณาเมทริกซ์การหมุน

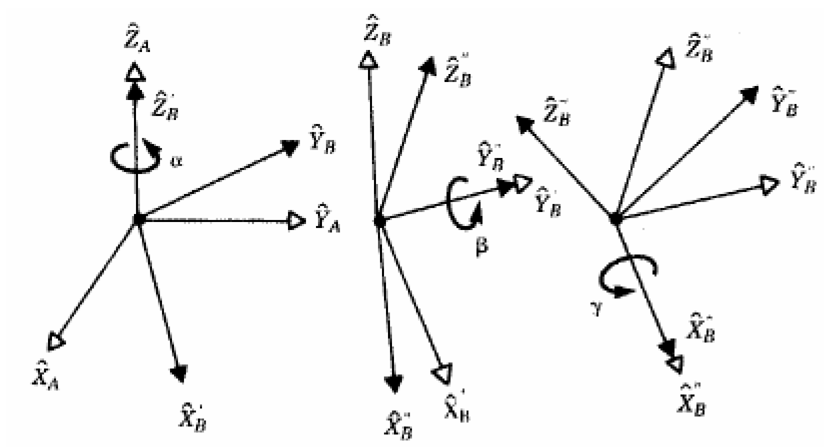
$$\mathbf{R}_{xyz}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

พิจารณาจากสูตรที่ผ่านมา จะได้ว่าถ้าถอดรากที่สองของ $r_{11}^2+r_{21}^2$ เราจะได้ $\cos\beta$ จากนั้นใช้ $-r_{31}$ ประกอบสำหรับหาค่า β จาก ฟังก์ชัน arctan2 (หาค่ามุม θ จากสองพารามิเตอร์คือ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$) จากนั้นถ้า $\cos\beta$ ไม่เท่ากับศูนย์ เราสามารถที่จะหา α ด้วยการใช้ arctan2 ของ $r_{21}/\cos\beta$ และ $r_{11}/\cos\beta$ การหาค่า γ ทำได้โดยการใช้ arctan2 บน $r_{32}/\cos\beta$ และ $r_{33}/\cos\beta$ หรือเขียนเป็นสูตรได้ดังนี้

$$\beta=\arctan2(-r_{31},\sqrt{r_{11}^2+r_{21}^2})$$
$$\alpha=\arctan2(\mathrm{r}_{21}/\cos\beta, r_{11}/\cos\beta)$$
$$\gamma=\arctan2(r_{32}/\cos\beta, r_{33}/\cos\beta)$$

2. เขียนจากซ้ายไปขวาเป็นการหมุนที่เทียบกับเฟรมของวัตถุ เรียกวิธีนี้ว่า Euler angles ที่นิยมใช้มีสองแบบหลักคือ Z-Y-X Euler angles และ Z-Y-Z Euler angles

แบบ Z-Y-X Euler angles เริ่มด้วยการหมุนเฟรมวัตถุรอบแกน $\mathbf{z}$ เป็นมุม α จากนั้นหมุนรอบแกน $\mathbf{y}$ ของเฟรมวัตถุในขณะนั้นเป็นมุม β ตามด้วยการหมุนรอบแกน $\mathbf{x}$ ของเฟรมวัตถุเป็นมุม γ ด้วยหลักการเขียนการเคลื่อนที่จากซ้ายไปขวา เราสามารถเขียนเมทริกซ์การหมุนแบบ Z-Y-X Euler angles ได้คือ $\mathbf{R}_z(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_x(\gamma)$ จะเห็นได้ว่าเมทริกซ์ที่ได้ก็เหมือนกับแบบ X-Y-Z fixed angles แต่แตกต่างกันในแง่ของการตีความ



รูปที่ 1.8 การหมุนแบบ Z-Y-X Euler angles

แบบ Z-Y-Z Euler angles เริ่มด้วยการหมุนเฟรมวัตถุรอบแกน $\mathbf{z}$ เป็นมุม α จากนั้นหมุนรอบแกน $\mathbf{y}$ ของเฟรมวัตถุในขณะนั้นเป็นมุม β ตามด้วยการหมุนรอบแกน $\mathbf{z}$ ของเฟรมวัตถุอีกครั้งเป็นมุม γ เราเขียนเมทริกซ์การหมุนแบบ Z-Y-Z Euler angles ได้คือ $\mathbf{R}_z(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)$