เมท็อดแบบเรียกซ้ำ (recursive)

ความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrences)

- การเขียนความสัมพันธ์ของจำนวนเต็มในลำดับ

0, 1, 2, 3, 4, ... $a_n = a_{n-1} + 1$ เมื่อ $n > 0,\ a_0 = 0$

3, 5, 7, 9, 11, ... $a_n = a_{n-1} + 2$ เมื่อ $n > 0,\ a_0 = 3$

0, 1, 3, 6, 10, 15, ... $a_n = a_{n-1} + n$ เมื่อ $n > 0,\ a_0 = 0$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,... $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ เมื่อ $n > 1,\ f_0 = 0,\ f_1 = 1$

a_n = 0, 1, 3, 6, 10, 15, ...

- รู้ว่า $a_n = (0+1+2+...+n)$

แบบที่ 1

```
public static int a(int n) {
  int s = 0;
  for (int i = 0; i <= n; i++)
    s += i;
  return s;
}
```

- รู้ว่า $a_n = a_{n-1} + n$ เมื่อ $n > 0,\ a_0 = 0$

แบบที่ 2

```
public static int a(int n) {
  if (n <= 0)
    return 0;
  else
    return a(n-1) + n;
}
```


f_n = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

แบบที่ 1

```
public static int fib(int n) {
  if (n < 2) return n;
  int[] f = new int[n + 1];
  f[0] = 0; f[1] = 1;
  for (int i = 2; i <= n; i++)
    f[i] = f[i-1] + f[i-2];
  return f[n];
}
```

แบบที่ 2

```
public static int fib(int n) {
  if (n < 2) return n;
  int fn = 0, fn1 = 0, fn2 = 1;
  for (int i = 2; i <= n; i++) {



  }
  return fn;
}
```

f_n = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

แบบที่ 3

```
public static int fib(int n) {
  if (n < 2) return n
  int fn2 = fib(n-2);
  int fn1 = fib(n-1);
  return fn1 + fn2;
}
```

```
public static int fib(int n) {
  if (n < 2) return n
  return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```


เมท็อดหาค่า $n!$

แบบที่ 1

```
public static int fac(int n) {
  int fac = 1;
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    fac = fac * i;
  }
  return fac;
}
```

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

แบบที่ 2

```
public static int fac(int n) {
  if (n == 0) return 1;
  int f = fac(n-1);
  return n * f;
}
```

กรณีเล็กสุด

ตามนิยามของแฟกตอเรียล

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n(n-1)! & n \geq 1 \end{cases}$$

โปรแกรมแบบ recursive

- โปรแกรมที่มีการเรียกตัวเอง
- การทำงานแบ่งเป็นกรณี ๆ
  - กรณีพื้นฐาน ทำเสร็จได้ทันที
  - กรณีอื่น เรียกตัวเอง โดยขนาดของปัญหาต้องเล็กลง
- การเรียกแต่ละครั้ง จะมีการสร้างตัวแปรในเมท็อดชุดใหม่ในระบบ

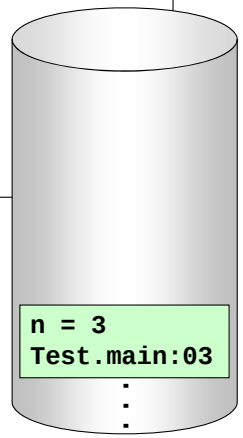
```
public static void main(String[] args) {
  jeng3(10);
}
public static void jeng3(int n) {
  System.out.println(n);
  jeng3(n-1);
}
```

ลองสั่งงานดูว่า เกิดอะไรขึ้น

ตัวแปรระหว่างการเรียกซ้ำ

```
01: public class Test {
02:   public static void main(String[] args) {
03:     System.out.println(fac(3));
04:   }
05:   public static int fac(int n) {
06:     if (n == 0) return 1;
07:     int f = fac(n-1);
08:     return n * f;
09:   }
10: }
```

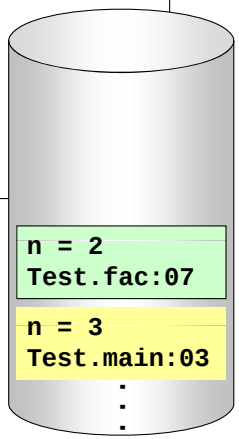
เมื่อระบบเรียกเมท็อด fac
ระบบจะสร้างตัวแปรของ fac



ตัวแปรระหว่างการเรียกซ้ำ

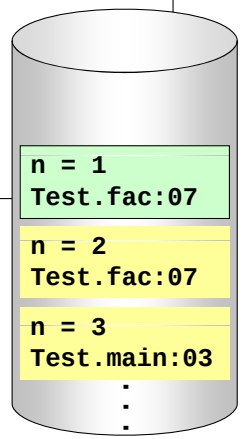
```
01: public class Test {
02:   public static void main(String[] args) {
03:     System.out.println(fac(3));
04:   }
05:   public static int fac(int n) {
06:     if (n == 0) return 1;
07:     int f = fac(n-1);
08:     return n * f;
09:   }
10: }
```

เมื่อเรียกเมท็อด fac อีก
ระบบจะสร้างตัวแปรชุดใหม่ของ fac
ชุดใหม่ทับชุดเก่า
(จะนำตัวแปรชุดเก่ากลับมาใช้ใหม่
เมื่อ return)



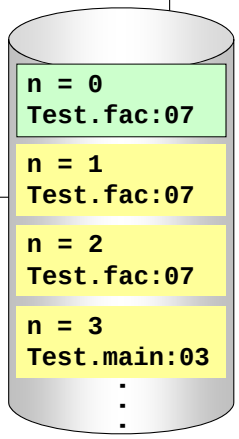
ตัวแปรระหว่างการเรียกซ้ำ

```
01: public class Test {
02:   public static void main(String[] args) {
03:     System.out.println(fac(3));
04:   }
05:   public static int fac(int n) {
06:     if (n == 0) return 1;
07:     int f = fac(n-1);
08:     return n * f;
09:   }
10: }
```



ตัวแปรระหว่างการเรียกซ้ำ

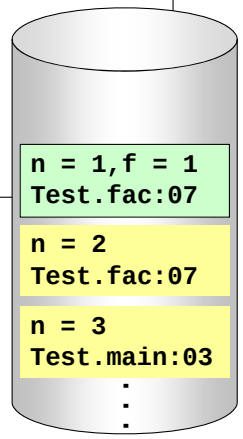
```
01: public class Test {
02:   public static void main(String[] args) {
03:     System.out.println(fac(3));
04:   }
05:   public static int fac(int n) {
06:     if (n == 0) return 1;
07:     int f = fac(n-1);
08:     return n * f;
09:   }
10: }
```



ตัวแปรระหว่างการเรียกซ้ำ

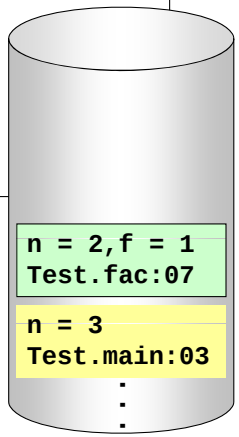
```
01: public class Test {
02:   public static void main(String[] args) {
03:     System.out.println(fac(3));
04:   }
05:   public static int fac(int n) {
06:     if (n == 0) return 1;
07:     int f = fac(n-1);
08:     return n * f;
09:   }
10: }
```

เมื่อ return
ระบบลบตัวแปรของเมท็อดออก
และนำตัวแปรชุดล่าสุดมาใช้ต่อ



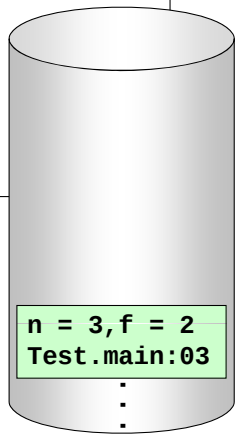
ตัวแปรระหว่างการเรียกซ้ำ

```
01: public class Test {
02:   public static void main(String[] args) {
03:     System.out.println(fac(3));
04:   }
05:   public static int fac(int n) {
06:     if (n == 0) return 1;
07:     int f = fac(n-1);
08:     return n * f;
09:   }
10: }
```



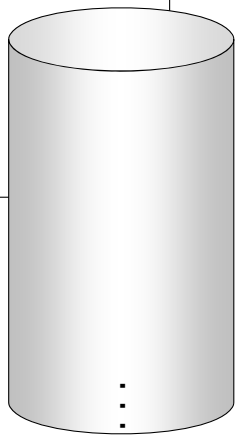
ตัวแปรระหว่างการเรียกซ้ำ

```
01: public class Test {
02:   public static void main(String[] args) {
03:     System.out.println(fac(3));
04:   }
05:   public static int fac(int n) {
06:     if (n == 0) return 1;
07:     int f = fac(n-1);
08:     return n * f;
09:   }
10: }
```



ตัวแปรระหว่างการเรียกซ้ำ

```
01: public class Test {
02:   public static void main(String[] args) {
03:     System.out.println(fac(3));
04:   }
05:   public static int fac(int n) {
06:     if (n == 0) return 1;
07:     int f = fac(n-1);
08:     return n * f;
09:   }
10: }
```



เมท็อดตรวจสอบว่าอาเรย์เรียงลำดับหรือไม่

แบบที่ 1

```
public static boolean isSorted(int[] d) {
  for (int i = 1; i < d.length; i++) {
    if (d[i - 1] > d[i]) return false;
  }
  return true;
}
```

แบบที่ 2

```
public static boolean isSorted(int[] d) {
  return isSorted(d, d.length);
}
private static boolean isSorted(int[] d, int n) {
  if (n <= 1) return true;
  if (d[n - 2] > d[n - 1]) return false;
  return isSorted(d, n - 1);
}
```

การคำนวณ a^k mod m

- a^k mod m เป็นการคำนวณที่ใช้บ่อยในการเข้ารหัสลับ
- ตัวอย่างที่ 1 : 2^{20} % 31 = ?
  - คำนวณ 2^{20} ได้ 1048576 จากนั้น % 31 ได้ 1
- ตัวอย่างที่ 2 : 2^{101} % 31 = ?
  - คำนวณ 2^{101} ได้ 2535301200456458802993406410752 จากนั้น % 31 ได้ 2
  - ทำอีกแบบ :

$$a^k \% m = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ (a^{\lfloor k/2 \rfloor} \% m)^2 \% m & k \text{ is even} \\ a(a^{\lfloor k/2 \rfloor} \% m)^2 \% m & k \text{ is odd} \end{cases}$$

$$2^{60} \bmod 10 = 4^2 \bmod 10 = 6$$
$$2^{30} \bmod 10 = 8^2 \bmod 10 = 4$$
$$2^{15} \bmod 10 = 2\times 8^2 \bmod 10 = 8$$
$$2^{7} \bmod 10 = 2\times 8^2 \bmod 10 = 8$$
$$2^{3} \bmod 10 = 2\times 2^2 \bmod 10 = 8$$
$$2^{1} \bmod 10 = 2\times 1^2 \bmod 10 = 2$$
$$2^{0} \bmod 10 = 1$$

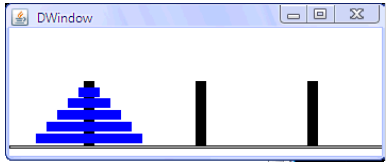
การคำนวณ a^k mod m

$$a^k \bmod m = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \left(a^{\lfloor k/2 \rfloor} \bmod m\right)^2 \bmod m & k \text{ is even} \\ a\left(a^{\lfloor k/2 \rfloor} \bmod m\right)^2 \bmod m & k \text{ is odd} \end{cases}$$

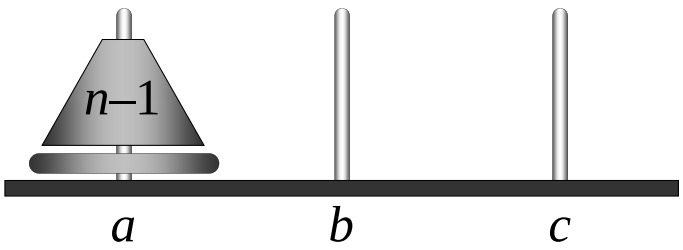
```
public static int powerMod(int a, int k, int m) {
  if (k == 0) return 1;
  int p = powerMod(a, k / 2, m);
  p = (p * p) % m;
  if ((k % 2) == 1) p = (a * p) % m;   // p is odd
  return p;
}
```


ปัญหา Tower of Hanoi

- มีเสา 3 ต้น
- ใส่จานกลมมีรูตรงกลางขนาดต่างกัน n ใบ ในเสาต้นซ้ายกองเรียงตามขนาด ใบใหญ่สุดอยู่ล่างสุด
- ต้องการ
  - ย้ายจานทุกใบจากเสาซ้ายไปใส่ที่เสาขวา
  - ย้ายได้ครั้งละใบ
  - อนุญาตให้ใบเล็กทับใบใหญ่ได้เท่านั้น
- ย้ายอย่างไร ?

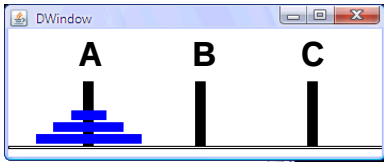


hanoi(n, a, b, c)




```
hanoi(n – 1, a, c, b)
move n : a → c
hanoi(n – 1, b, a, c)
```


โปรแกรมแก้ปัญหา Tower of Hanoi




```
move 1 : A -> C
move 2 : A -> B
move 1 : C -> B
move 3 : A -> C
move 1 : B -> A
move 2 : B -> C
move 1 : A -> C
```

```
public class HanoiTower {
  public static void main(String[] args) {
    hanoi(3, "A", "B", "C");
  }
  private static void hanoi(int n,
                  String from, String tmp, String to) {
    if (n == 0) return;
    hanoi(n - 1, from, to, temp);
    System.out.println("move " + n + " : " + from +
                                        " -> " + to);
    hanoi(n - 1, temp, from, to);
  }
}
```