ฟังก์ชันก่อกำเนิด

4

กำหนดให้ $\langle g_n \rangle$ แทนลำดับของจำนวน $\langle g_0 , g_1 , g_2 , ... \rangle$ สมมติเราต้องการบรรยายลำดับของจำนวน $\langle g_n \rangle = \langle 0, 1, 3, 6, 10, ... \rangle$ ก็สามารถกระทำได้หลายวิธี เราอาจใช้แบบที่เขียนในบรรทัดบนนี้ ที่เป็นการแจงกรณีให้เห็นกันจะจะไปเลยว่าแต่ละตัวมีค่าเท่าไรบ้าง เริ่มกันตั้งแต่ตัวที่ศูนย์ ไปเรื่อยๆ การแจงกรณีแบบนี้ก็มีปัญหาอยู่ตรงที่ว่าจะแจงกรณีไปกี่ตัวดี ถึงจะให้ผู้อ่านรับรู้ธรรมชาติของลำดับของจำนวนเหล่านี้ วิธีที่สองก็เขียน g_n ออกเป็นสูตรสำเร็จไปเลย หรือที่เรียกกันว่า*รูปแบบปิด* (closed form) จากตัวอย่างนี้จะได้ $g_n = n(n + 1) / 2$ คืออยากรู้ตัวที่เท่าไร ก็แทนในสูตรคำนวณเล็กน้อยก็ได้คำตอบทันที วิธีที่สามเป็นการเขียนบรรยาย g_n ด้วยค่าของตัวก่อนๆ ในลำดับ (ตัวอย่างข้างบนนี้จะได้ $g_n = g_{n-1} + n$ สำหรับ $n > 0$ โดยที่ $g_0 = 0$) ที่เรียกว่า*ความสัมพันธ์เวียนเกิด* (recurrent relation) ซึ่งเราจะได้ศึกษากันในบทที่ 5 และวิธีสุดท้ายที่เราจะนำเสนอในหนังสือเล่มนี้ (แต่เราจะนำมาพูดกันก่อน) คือการแทนทั้งลำดับ $\langle g_n \rangle$ ด้วยอนุกรมกำลังที่เรียกว่า*ฟังก์ชันก่อกำเนิด* (generating function)

เราเรียกฟังก์ชัน $G(\text{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$ ว่าเป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของ $\langle g_n \rangle$ โดยแทนลำดับของจำนวนด้วยอนุกรมกำลังที่มี g_n เป็นสัมประสิทธิ์ของ x^n ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ $\langle g_n \rangle = \langle 0, 1, 3, 6, 10, ... \rangle$ ก็คือ $G(x) = 0x^0 + 1x^1 + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + ...$ อาจมีคนสงสัยตรงนี้ว่าเราจะวุ่นวายแทนลำดับของจำนวนด้วยอนุกรมกำลังทำไม ? ต้องขอบอกตรงนี้ก่อนว่าการตีปัญหาการนับโดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดนั้น ไม่ได้เริ่มเขียนในรูปแบบแจงกรณีข้างต้นหรอก แต่เราสามารถใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดในการตีโจทย์ ออกเป็นฟังก์ชันในลักษณะอื่น จากนั้นจึงใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการจัดการอนุกรมกำลังเพื่อหารูปแบบปิดของสัมประสิทธิ์ g_n ที่ต้องการ ฟังก์ชันก่อกำเนิดเป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญมากๆ ในการแทนและจัดการ

กับลำดับของจำนวน อีกทั้งนำมาใช้ในการแจงนับโครงสร้างเชิงการจัด (combinatorial structures) ที่ซับซ้อนได้มากมาย ในบทนี้เราจะศึกษาวิธีการเขียนฟังก์ชันก่อกำเนิดเพื่อแทนปัญหาการนับต่างๆ และวิธีจัดการฟังก์ชันก่อกำเนิดเพื่อหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่างๆ

การเขียนฟังก์ชันก่อกำเนิด

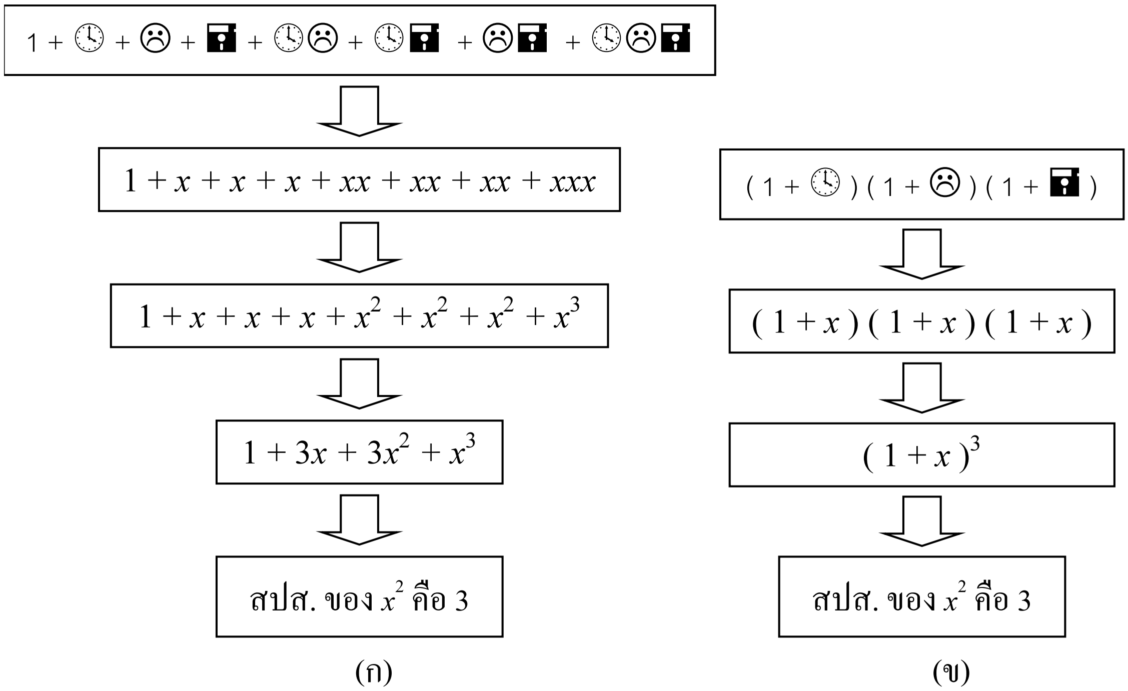
ปัญหาด่านแรกที่ต้องฝ่าฟันในเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดนั้นคือ การเขียนตัวฟังก์ชันก่อกำเนิดจากปัญหาการนับที่ต้องการแก้ไข จะขอยกตัวอย่างจำนวนหนึ่งเพื่อแสดงที่มาและแรงจูงใจเบื้องหลังของฟังก์ชันก่อกำเนิด

ตัวอย่างที่ 4-1 อยากทราบจำนวนวิธีการเลือกของ 2 ชิ้นจากของ 3 ชิ้นที่ไม่เหมือนกัน

ปัญหานี้ไม่ยาก คำตอบคือ $C(3,2) = 3$ โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับการเลือกที่เรียนในชั้นมัธยม แต่คราวนี้เราจะมาศึกษาการแก้ปัญหานี้ในอีกรูปแบบหนึ่ง สมมติให้ของทั้งสามชิ้นนี้คือ 🕒 ☹ และ 🖫 วิธีการเลือกของกี่ชิ้นก็ได้ทั้งหมดจากสามชิ้นนี้คือ 1 + 🕒 + ☹ + 🖫 + 🕒☹ + 🕒🖫 + ☹🖫 + 🕒☹🖫 มีวิธีทั้งสิ้น 8 วิธี (โดยให้ 1 แทนคำตอบที่ไม่เลือกของสักชิ้น และเครื่องหมาย + แทนคำว่า "หรือ" การคูณหมายถึง "และ") เนื่องจากเราสนใจแต่จำนวนวิธี (ไม่ได้สนใจว่าเลือกแล้วได้อะไรบ้าง) ดังนั้นจะขอแทนสัญลักษณ์สิ่งของต่างๆ ด้วยตัวอักษร x จากนั้นลดรูปนิพจน์ข้างต้นจนได้ $1 + 3x + 3x^2 + x^3$ (ดูรูปที่ 4–1ก) เราต้องการจำนวนวิธีการเลือกของ 2 ชิ้นจาก 3 ชิ้นที่ไม่เหมือนกัน ก็จะมีค่าเท่ากับสัมประสิทธิ์ของพจน์ x^2 ที่มีค่าเท่ากับ 3เนื่องจาก x^2 แทนของสองชิ้นโดยที่สัมประสิทธิ์ได้มาจากการรวมของที่มีจำนวนเท่ากันเข้าด้วยกัน เราเรียกฟังก์ชันของตัวแปร x ที่เขียนขึ้นนี้แหละว่าฟังก์ชันก่อกำเนิด

พออ่านถึงตรงนี้หลายคนอาจรู้สึกว่าวิธีข้างต้นไม่เห็นจะมีอะไรเลย ยุ่งยากเกินเหตุด้วยซ้ำ เพราะต้องลุยแจงการเลือกทุกๆ กรณีก่อนจะได้คำตอบ ความจริงแล้วการเขียนฟังก์ชันก่อกำเนิดของปัญหานั้น จะไม่ได้มาในลักษณะที่แสดงในรูปที่ 4–1ก แต่จะเป็นไปดังรูปที่ 4–1ข คือเราเริ่มเขียนตัวฟังก์ชันจากนิยามของปัญหา สำหรับปัญหาการเลือกของจากของต่างกันสามชิ้นนั้นจะบรรยายได้เป็น นิพจน์ (1 + 🕒)(1 + ☹) (1 + 🖫) อ่านตีความได้ว่าการเลือกของมาจากการไม่เลือกหรือเลือก 🕒 และการไม่เลือกหรือเลือก ☹ และการไม่เลือกหรือเลือก 🖫 (ขอย้ำว่า

บวก คือ "หรือ" คูณคือ "และ") เมื่อแทนสัญลักษณ์ต่างๆ ด้วยตัวอักษร x แล้วลดรูปนิพจน์จะได้ $(1+x)^3$ (ดูรูปที่ 4–1ข) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่เรารู้ว่าค่าสัมประสิทธิ์ของ x^2 คือ $C(3, 2) = 3$ (จากทฤษฎีบททวินาม)



รูปที่ 4–1 ฟังก์ชันก่อกำเนิดของปัญหาการเลือกของต่างกันสามชิ้น

ตัวอย่างที่ 4-2 จงหาจำนวนวิธีการเลือกของ 5 ชิ้นจากของสี่ประเภท (☺ 🖫 ☎ ✉) โดยที่มี ☺ 🖫 ☎ และ ✉ อยู่ 6, 2, 3 และ 3 ชิ้นตามลำดับ มีข้อบังคับในการเลือกว่าจะต้องเลือก ☎ และ ✉ ประเภทละอย่างน้อยหนึ่งชิ้น และห้ามเลือก ☺ เกินสองชิ้น

เราสามารถบรรยายปัญหานี้ด้วยนิพจน์

(1 + ☺ + ☺^{2})(1 + 🖫 + 🖫^{2}) (☎ + ☎^{2} + ☎^{3}) (✉ + ✉^{2} + ✉^{3})

การยกกำลังสัญลักษณ์ที่เขียนในนิพจน์ข้างบนนี้ หมายถึงการเลือกของชิ้นนั้นหลายๆ ตัวตามเลขกำลัง เช่น 🖫^{2} มาจาก 🖫 🖫 แทนการเลือก 🖫 สองแผ่น ให้สังเกตว่าเราเขียนนิพจน์นี้ตรงๆ ตามคำบรรยายของปัญหาเช่น บอกว่าเลือก ☺ ได้ไม่เกินสองชิ้นก็เขียน ☺ ในรูปยกกำลังตั้งแต่ 0 ถึง 2 บอกว่าต้องเลือก ☎ อย่างน้อยหนึ่งก็เขียน ☎ ในรูปยกกำลังตั้งแต่ 1 ไปเรื่อยๆ ตามจำนวนชิ้นที่มี

จากนั้นเราแทนสัญลักษณ์ของสิ่งของทั้งหลายด้วยตัวอักษร x (อย่าลืมว่าเราแทนเช่นนี้เนื่องด้วยเราสนใจเฉพาะจำนวนวิธีการเลือก เราไม่ได้สนใจว่าเลือกแล้วมีแบบไหนบ้าง) จะได้

$$(1+x+x^2)(1+x+x^2)(x+x^2+x^3)(x+x^2+x^3) = (1+x+x^2)^2(x+x^2+x^3)^3$$

เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดที่แทนปัญหาข้างต้น โดยที่สัมประสิทธิ์ของ x^5 คือคำตอบที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 4-3 จงหาจำนวนคำตอบจำนวนเต็มของสมการ $e_1 + e_2 + e_3 = 4$ $e_i \geq 0, i = 1,2,3$

ปัญหานี้แทนได้ด้วยฟังก์ชันก่อกำเนิดข้างล่างนี้

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x+x^2+x^3+\ldots)$$

ฟังก์ชันนี้ประกอบด้วยสามส่วน แต่ละส่วนแทนค่าที่เป็นไปได้ของแต่ละตัวแปร แต่ละส่วนประกอบด้วยพจน์ต่างๆ ที่เลขชี้กำลังของ x แทนค่าของตัวแปร ถ้าเขียนฟังก์ชันนี้ในรูปของอนุกรมกำลัง $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ จะได้คำตอบที่ต้องการคือ a_4 ที่เป็นสัมประสิทธิ์ของพจน์ x^4 เนื่องจาก a_4 ได้มาจากการรวมพจน์ต่างๆ ที่เกิดจากการคูณพจน์สามพจน์จากสามส่วนของฟังก์ชันแล้วได้ x^4 เมื่อพจน์สามพจน์คูณกันเลขกำลังของแต่ละพจน์จะรวมกัน ตัวอย่างเช่น หากเรานำ x^0, x^1 และ x^3 จาก ส่วนที่หนึ่งสองและสามตามลำดับ ที่คูณกันได้ $x^0x^1x^3 = x^{0+1+3} = x^4$ เลขกำลังของทั้งสามพจน์จึงแทนค่าของตัวแปรทั้งสามตัว ($e_1 = 0$, $e_2 = 1$, $e_3 = 3$) ที่รวมกันแล้วได้ 4 ตามโจทย์ a_4 จึงเป็นผลรวมของวิธีต่างๆ ในการกำหนดค่าของตัวแปรทั้งสามเพื่อให้ได้ค่า 4

ให้สังเกตว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดที่เขียนขึ้นนั้นนอกจากจะแทนจำนวนคำตอบของสมการกรณีมีผลรวมของตัวแปรเท่ากับ 4 ตามโจทย์แล้ว ยังสามารถแทนจำนวนคำตอบมีผลรวมของตัวแปรมีค่าเท่ากับ k ใดๆได้ ซึ่งคือสัมประสิทธิ์ของ x^k ในฟังก์ชันก่อกำเนิด $(1+x+x^2+x^3+\ldots)^3$

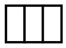
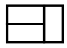
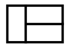
ตัวอย่างที่ 4-4 หากเราเพิ่มข้อจำกัดของตัวแปรในปัญหาของตัวอย่างที่ 4-3 เป็น $0 \leq e_1 \leq 3$, $2 \leq e_2 \leq 4$ และ $e_3 \geq 3$ ฟังก์ชันก่อกำเนิดที่แทนปัญหานี้จะเป็น

$$(1+x+x^2+x^3)(x^2+x^3+x^4)(x^3+x^4+x^5+x^6+\ldots)$$

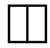
โดยที่เลขกำลังต่างๆ ในวงเล็บที่หนึ่ง ที่สองและที่สามของฟังก์ชันนี้แทนค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปร e_1 e_2 และ e_3 ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 4-5 จงหาจำนวนวิธีการปูกระเบื้องขนาด 1×2 (วางแนวตั้งหรือนอนก็ได้) บนพื้นขนาด $2\times n$

ให้ D คือวิธีการปูกระเบื้องทุกรูปแบบ หากเราลองแจงกรณีการปูกระเบื้องสักจำนวนหนึ่งจะได้ดังนี้ (1 แทนการปูพื้นที่ขนาด 0)

D = 1 +  +  +  +  +  +  + …

แยกตัวประกอบ  และ  ออกจะได้

D = 1 + (1 +  +  +  +…) + (1 +  +  +  +…)

สังเกตได้ว่าที่ปรากฏในวงเล็บนั้นก็คือ D นั่นเอง จะได้

D = 1 + D + D (1)

ข้อสังเกตประการหนึ่งของปัญหานี้คือ การจะปูพื้นที่ขนาด $2\times n$ ด้วยกระเบื้องขนาด 1×2 ได้จะต้องใช้กระเบื้องจำนวน n แผ่น ในกรณีนี้เราสนใจเพียงแค่จำนวนวิธีการปูโดยไม่สนใจรายละเอียดในการปู ดังนั้นจึงสามารถแทนตัวกระเบื้องแต่ละแผ่นในสมการ (1) ด้วยตัวอักษร x หนึ่งตัว จะได้ $D(x) = 1 + x\,D(x) + x^2\,D(x)$ ย้ายข้างไปมาได้ $D(x) = 1/(\,1 - x - x^2\,)$ โดยที่คำตอบคือสัมประสิทธิ์ของ x^n (ฟังก์ชันก่อกำเนิดที่ได้นี้เขียนอยู่ในรูปแบบปิดที่จะอธิบายในรายละเอียดในหัวข้อถัดไป)

ตัวอย่างที่ 4-6 จงหาจำนวนวิธีในการทอนเงินมูลค่า k บาทด้วยเหรียญ 1, 5, และ 10 บาท

ในกรณีที่เราใช้เฉพาะเหรียญ 1 บาทในการทอนเงิน ไม่ว่าจะทอนเงินเท่าใดก็กระทำได้แบบเดียว ดังนั้นจะได้ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการทอนด้วยเหรียญ 1 บาทคือ $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$ ให้สังเกตว่ามูลค่าของเงินที่ทอนคือเลขกำลังของ x จำนวนวิธีคือสัมประสิทธิ์ ถ้ามีทั้งเหรียญ 1 บาทและ 5 บาทไว้ใช้ทอน ก็จะได้ฟังก์ชันก่อกำเนิดในการทอนเงินเป็น $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots)$ วงเล็บที่สองนี้แทนการทอนเงินด้วยเหรียญ 5 ดังนั้นถ้าจะทอนเงิน 13 บาทด้วยเหรียญ 1 กับ 5 บาท จะได้จำนวนวิธีการทอนเงินเท่ากับสัมประสิทธิ์ของ $x^{13} = 2$ ที่มาจาก x^3x^{10} และ x^8x^5

ในทำนองเดียวกันจะได้ฟังก์ชันก่อกำเนิดของการทอนเงินโดยใช้เหรียญ 1, 5, และ 10 บาทเป็น $(\,1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\,)(\,1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots\,)\,(\,1 + x^{10} + x^{20} + x^{30} + \ldots\,)$ คำตอบของการทอนเงิน k บาทก็คือสัมประสิทธิ์ของ x^k

---

ตัวอย่างที่ 4-7 หากเรามีเหรียญแบบ 1, 5, และ 10 บาทจำนวนมากมาย จงหาจำนวนวิธีในการใส่เงินเข้าตู้ขายเครื่องดื่ม (สนใจลำดับของการใส่เงินด้วย) เป็นจำนวน n เหรียญที่รวมมูลค่าแล้วเป็นเงิน k บาท

กรณีที่ $n = 1$ คือกรณีที่ใส่เงินแค่เหรียญเดียว มีทางเป็นไปได้สามกรณีคือใส่เหรียญ 1 บาท 1 เหรียญ หรือ 5 บาท 1 เหรียญ หรือ 10 บาท 1 เหรียญ จะได้ฟังก์ชันก่อกำเนิดเป็น $(x + x^5 + x^{10})$

กรณีที่ $n = 2$ คือต้องการใส่ 2 เหรียญ ก็จะมีฟังก์ชันก่อกำเนิดเป็น $(x + x^5 + x^{10})(x + x^5 + x^{10})$ วงเล็บแรกแทนการใส่เหรียญที่หนึ่งและวงเล็บที่สองแทนการใส่เหรียญที่สอง ตัวอย่างเช่น การใส่เงินสองเหรียญแล้วได้เงิน 11 บาทมีสองวิธีคือใส่เหรียญ 1 ตามด้วยเหรียญ 10 (แทนด้วยพจน์ xx^{10}) และการใส่เหรียญ 10 ตามด้วยเหรียญ 1 (แทนด้วยพจน์ $x^{10}x$)

สำหรับกรณี n ใดๆ ก็จะได้ฟังก์ชันก่อกำเนิดเป็น $(x + x^5 + x^{10})^n$ โดยคำตอบจะเป็นสัมประสิทธิ์ของ x^k ในอนุกรมกำลังของฟังก์ชันก่อกำเนิดนี้

ถ้าจะเปรียบเทียบฟังก์ชันก่อกำเนิดของตัวอย่างนี้กับตัวอย่างที่ 4-6 ที่อาจดูผิวเผินคล้ายๆ กัน แต่ความจริงแล้วต่างกันมาก ในตัวอย่างที่ 4-6 เราต้องการทอนเงินให้ได้ k บาท การทอนใช้กี่เหรียญก็ได้ไม่ใช่เงื่อนไข และลำดับของเหรียญที่ทอนคืนให้ก็ไม่สนใจ แต่ละวงเล็บของฟังก์ชันก่อกำเนิดในตัวอย่างที่ 4-6 จึงแทนชนิดของเหรียญ ในขณะที่ปัญหาในตัวอย่างนี้ เราบังคับว่าต้องใส่จำนวน n เหรียญ และยังสนใจลำดับการใส่เหรียญด้วย ดังนั้นแต่ละวงเล็บจึงแทนลำดับของการใส่เหรียญ (โดยแต่ละครั้งใส่ได้เพียงสามกรณีเนื่องจากมีเหรียญสามชนิด)

ตัวอย่างที่ 4-8 คราวนี้เราจะตัดเงื่อนไขของจำนวนเหรียญที่ใส่เงินเข้าตู้ขายเครื่องดื่มในตัวอย่างที่ 4-7 ออก แล้วให้หาจำนวนวิธีการใส่เงินเป็นจำนวนมูลค่า k บาทเข้าตู้ ถ้ามีเหรียญสามชนิดคือ 1, 5 และ 10 บาท (ให้กี่เหรียญก็ได้ แต่ต้องสนใจอันดับที่ใส่เหรียญด้วย)

จากฟังก์ชันก่อกำเนิด $(x + x^5 + x^{10})^n$ ของกรณีใส่เหรียญเป็นจำนวน n เหรียญให้ได้ k บาทในตัวอย่างที่ 4-7 เราสามารถขยายเป็นให้รองรับกรณีใช้กี่เหรียญก็ได้ โดยการแจงกรณีจำนวนเหรียญในทุกๆ กรณีเลย ก็จะได้ฟังก์ชันก่อกำเนิด

$$1 + (x + x^5 + x^{10}) + (x + x^5 + x^{10})^2 + (x + x^5 + x^{10})^3 + \ldots$$

นั่นคือเราเขียนฟังก์ชันที่แทนจำนวนวิธีการใส่เงินมูลค่า k บาทโดยใช้ 0 เหรียญ 1 เหรียญ 2 เหรียญ 3 เหรียญ แจงกรณีเช่นนี้ไปเรื่อยๆ ก็จะได้สัมประสิทธิ์ของ x^k ในอนุกรมกำลังของฟังก์ชันกำเนิดข้างบนนี้เป็นคำตอบ

ตัวฟังก์ชันก่อกำเนิดนั้นประกอบไปด้วยการบวกและการคูณกันของพจน์ที่มีกำลังต่างๆ กัน การบวกเป็นเพียงการระบุทางเลือกของคำตอบ ส่วนการคูณนั้นเป็นตัวแทนของการประกอบตัวเลือกต่างๆ ที่เลือกมาเพื่อให้ได้คำตอบ ให้สังเกตว่าการคูณกันของพจน์ที่มีกำลังต่างๆ กันนั้น ก็เป็นการรวมเลขกำลังเหล่านั้นเข้าด้วยกัน ที่แทนคำตอบหนึ่งๆ เมื่อสามารถเขียนเป็นอนุกรมกำลัง $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ได้ก็แสดงว่าสัมประสิทธิ์ของ x^k นั้นแทนจำนวนของพจน์ x^k ไว้หมด นั่นคือนับให้หมดทุกๆ กรณี

อ่านมาถึงตรงนี้แล้วอาจยังไม่เห็นความมหัศจรรย์ของฟังก์ชันก่อกำเนิดที่ใช้แทนปัญหาการนับ เพราะคงมีหลายคนสงสัยตรงนี้ว่าเมื่อเขียนฟังก์ชันก่อกำเนิดได้แล้ว ก็ต้องมานั่งคูณพจน์ต่างๆ ให้หมดและรวมพจน์ที่มีกำลังเหมือนกันเข้าด้วยกันจึงจะเขียนเป็นอนุกรมกำลังที่สัมประสิทธิ์เป็นคำตอบอย่างนั้นหรือ ? ถ้าต้องทำเช่นนี้จริงก็ไม่ต่างอะไรกับการลุยแจงกรณีแล้วนับ ความมหัศจรรย์ของฟังก์ชันก่อกำเนิดอยู่ตรงที่ว่า เราสามารถใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์อื่นๆ เช่น การหาอนุพันธ์ การหาปริพันธ์ การจัดการอนุกรมอนันต์ในรูปแบบต่างๆ เพื่อเขียนฟังก์ชันก่อกำเนิดในรูปแบบอนุกรมกำลังได้โดยไม่ต้องลุยแจงกรณี ซึ่งจะได้กล่าวในหัวข้อถัดไป

ขอปิดท้ายหัวข้อนี้ด้วยคำถามที่มักพบบ่อยมากๆ ก็คือแล้วตัวอักษร x ที่ปรากฏอยู่ในฟังก์ชันก่อกำเนิดนั้นมันมีค่าเท่าใด ? เราต้องหาค่ามันไหม ? ก็ขอให้ย้อนกลับไปนึกถึงตัวอย่างที่ได้นำเสนอมาทั้งหมดจะเห็นว่า x เป็นเพียงแค่ตัวแทนสิ่งของที่ยุ่งเกี่ยวในการนับ เราได้เห็น x หนึ่งตัวแทน 🕒 ☹ 🖬 ☺ 🖫 ☎ ✉ หนึ่งสัญลักษณ์ในตัวอย่างที่ 4-1 และตัวอย่างที่ 4-2 เห็น x หนึ่งตัวแทนค่า 1 ในตัวแปร e_i ในตัวอย่างที่ 4-3 และตัวอย่างที่ 4-4 เห็น x หนึ่งตัวแทนกระเบื้องหนึ่งแผ่นในตัวอย่างที่ 4-5 และเห็น x หนึ่งตัวแทนมูลค่า 1 บาทในตัวอย่างที่ 4-6 ถึงตัวอย่างที่ 4-8 เราใช้ x ที่กำลังของมันแทนจำนวนของที่มันแทนอยู่ เมื่อพจน์ที่มี x คูณกันก็จะเป็นการรวมกำลังเข้าด้วยกัน ที่แทนจำนวนของ x ที่กำลังนับ ดังนั้นเราจะไม่สนใจว่า x มีค่าเท่าใด ตราบเท่าที่มีบางค่าของ x ที่ทำให้เราใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์จัดการฟังก์ชันให้อยู่ในรูปแบบอนุกรมกำลังที่จะกล่าวต่อไป